**Respuesta al reporte del árbitro sobre el trabajo “La raíz cuadrada de una mariposa” de José Manuel González Valdés y Alfredo Raya,**

Estimado Dr. Luis Villaseñor

Editor de la revista Ciencia Nicolaita,

PRESENTE

Estimado Dr. Villaseñor,

Agradecemos el reporte del árbitro sobre el manuscrito que hemos sometido a consideración para su publicación en la revista “Ciencia Nicolaita”. Sus atinados comentarios sin duda contribuyen a incrementar la calidad del manuscrito. A continuación respondemos detalladamente cada observación del árbitro.

1. Hemos agregado la ecuación de Schrödinger libre en la imagen de Foldy- Whouthuysen y escrito apropiadamente los eigenvalores del Hamiltoniano en esta imagen, para claridad de la lectura.
2. Agregamos una breve discusión sobre el origen y significado de los parámetros b y lambda, así como la definición del parámetro épsilon. Hemos corregido además el deletreo correcto Hamiltoniano en esta parte.
3. Hemos agregado una discusión de por qué consideramos solo valores racionales del flujo magnético o su inverso. El caso de valores irracionales describe un conjunto infinito, no numerable y de medida cero, homeomórfico al conjunto de Cantor para los valores de la energía, por lo que su efecto no modifica el espectro de la Figura 3.
4. Hemos agregado los paréntesis faltantes en todo el manuscrito.
5. Hemos re-fraseado el último renglón de la sección “Red Hexagonal” para aclarar la lectura.
6. Modificamos la presentación para demostrar la afirmación de que el cuadrado del Hamiltoniano de amarre fuerte para la red hexagonal nos arroja dos copias del correspondiente al de la red cuadrada. Analíticamente discutimos en detalle el origen de esta degeneración en ausencia del campo magnético y sugerimos como ejercicio al lector su confirmación numérica cuando se agrega la influencia del campo, delineando la estrategia que debería seguir quien tuviera el interés.
7. Hemos corregido la exposición de las conclusiones para aclarar cuándo estamos discutiendo los casos libres y los casos con campo magnético para los arreglos cristalinos.

Esperamos que con estas modificaciones, el manuscrito sea recomendado para su publicación.

Quedamos a sus órdenes para cualquier aclaración



Dr. Alfredo Raya

IFM-UMSNH

Tel. 322-3500 Ext. 4119

E-mail: raya@ifm.umich.mx

**La Raíz Cuadrada de una Mariposa**

José Manuel González Valdés, Alfredo Raya (IFM-UMSNH)

**Resumen:** Estudiamos el efecto de un campo magnético uniforme perpendicular a un cristal bidimensional en el espectro de energía de los electrones en la aproximación de amarre fuerte. Para una red cristalina cuadrada, que en ausencia del campo externo es regido por una ecuación cuántica no relativista, notamos que el campo magnético produce el bien conocido espectro de la mariposa de Hofstadter. Cuando el cristal tiene una estructura hexagonal, a bajas energías, la ecuación de movimiento para los portadores de carga es relativista. La correspondiente mariposa generada en presencia del campo magnético se modifica. Sin embargo, el espectro del cuadrado del Hamiltoniano de amarre fuerte para el caso hexagonal nos reproduce dos copias de la mariposa original de Hofstadter con signos cambiados, tal cual se observa en la forma no relativista de la ecuación de Dirac.

**Abstract:** We study the impact of a uniform magnetic field perpendicular to a bi-dimensional crystal in the energy spectrum for electrons in the tight-binding approximation. For a square lattice, which in absence of external fields is governed by a non-relativistic wave equation, we notice that the magnetic field produces the well-known spectrum of the Hofstadter butterfly. When the crystal has a hexagonal structure, at low energies the equation of motion for the charge carriers is relativistic. The corresponding butterfly generated in presence of the magnetic field gets modified. However, the spectrum of the squared tight-binding Hamiltonian for the hexagonal lattice reproduces two copies of the original Hofstadter butterfly, with different signs, in analogy to what happens in the non-relativistic form of the Dirac equation.

**Keywords:** Graphene, Hofstadter butterfly, Dirac equation

**Palabras Clave:** Grafeno, Mariposa de Hofstadter, ecuación de Dirac

**Introducción**

Para los sistemas macroscópicos, las leyes de la mecánica que mejor describen el comportamiento de los mismos son las de la mecánica clásica. En dos límites extremos estas leyes dejan de ser válidas, en el límite de distancias pequeñas, es decir, para sistemas microscópicos, donde las leyes de Newton deben cambiarse por las leyes de la mecánica cuántica, y en el límite de altas energías, es decir, el de los sistemas relativistas, donde las leyes físicas mantienen su forma de acuerdo a los principios de Teoría de la Relatividad Especial de Einstein. Ambos sistemas están caracterizados por constantes fundamentales, la constante de Planck para los sistemas cuánticos y la velocidad de la luz en el vacío, *c,* para los sistemas relativistas o de altas energías (ver, p. ej. [1,2]). La física de partículas elementales se describe en términos de una mecánica cuántica relativista, llamada teoría cuántica de campos, que se rige tanto por como por *c.* Es por esta razón que usualmente uno utiliza un conjunto de *unidades naturales* que se describen fijando

En la mecánica cuántica ordinaria, la ecuación de movimiento para una partícula de masa , que se mueve bajo la influencia de un potencial *,* llamada ecuación de Schrödinger

es una ecuación en derivadas parciales, lineal en el tiempo y de segundo orden en las derivadas espaciales. Por esto, es incapaz de describir aspectos relativistas de, por ejemplo, un electrón. Más aún, para una partícula libre, es decir, cuando la ecuación de Schrödinger relaciona la energía y el momento de una partícula de la forma

llamada relación de dispersión no relativista.

El camino hacia una formulación correcta para la descripción de electrones en un contexto cuántico relativista fue trazado por Paul Adrian Dirac (ver, p. ej. [2]) proponiendo una ecuación --que ahora lleva su nombre--, que es lineal en las coordenadas espaciales y temporales, de acuerdo a los postulados de la relatividad especial, pero que es consistente con los postulados de la mecánica cuántica, en particular, con la interpretación estadística de la función de onda. Dicha ecuación tiene carácter matricial, y en forma covariante se escribe

donde son las matrices de Dirac, que verifican el álgebra de Clifford . Aquí, es el tensor métrico del espacio de Minkowski. En su representación irreducible, estas matrices tienen dimensión y una representación explícita para ellas es

siendo la matriz identidad y las matrices son las matrices de Pauli. Entonces, se representa mediante un vector columna de 4 componentes, llamado espinor, lo que garantiza que en consistencia con la interpretación probabilística de la ecuación de onda. Más aún, la energía de las partículas descritas por la ecuación de Dirac es de la forma

que en el límite ultrarelativista, es decir, cuando la masa es despreciable, nos da una relación de lineal entre la energía y el momento de la partícula,

Además, el maridaje entre la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad especial nos obliga a que, en aras de salvaguardar el principio de conservación de la energía, debamos aceptar la existencia de antimateria. Es decir, la ecuación de Dirac es una ecuación que describe electrones (materia) y positrones (antimateria), que tienen las mismas propiedades (masa, espín, energía, momento), pero cuya carga eléctrica es de signo opuesto. La ecuación de Dirac posee una forma no relativista bien establecida, con dos posibles signos para la energía. Dicha forma se obtiene a través de la transformación de Foldy-Wouthuysen [3,4] y resulta en una ecuación de Schrödinger libre de la forma

donde es el Hamiltoniano libre en la representación de Foldy-Wouthuysen, que satisface

La forma diagonal de nos indica que esta ecuación posee dos valores propios para la energía , que son igual magnitud pero signo contrario.

Ante el contraste de descripciones entre sistemas cuánticos relativistas y no relativistas, se antoja imposible tratar de describir un sistema de estado sólido, manipulable en un laboratorio universitario, mediante ecuaciones de onda relativistas. Afortunadamente, en el año 2004 fue descubierto en Manchester, Reino Unido, un material bidimensional, *el grafeno*, que consta de una red de átomos de carbono empacados en un arreglo de tipo panal de abeja de un solo átomo de espesor [5]. Por los experimentos realizados en este material, fueron galardonados con el Premio Nobel de Física 2010 los Dres. Andrei Geim y Konstantin Novoselov.

A bajas energías, las *cuasiparticulas* portadoras de carga del grafeno, llamadas en ocasiones grafinos [6,7] se comportan como electrones sin masa (o neutrinos con carga) en el sentido de que la relación energía-momento es lineal para estas excitaciones. A diferencia de los electrones ordinarios, los grafinos se mueven a la velocidad de Fermi [8], de modo que no son genuinamente relativistas, pero si tomamos un nuevo sistema de unidades en el que entonces podemos describir a los grafinos en términos de ecuaciones de onda completamente relativistas [9].

Un fenómeno que nos interesa explorar es el impacto de un campo magnético uniforme perpendicular a la capa del grafeno sobre los valores de la energía de estas partículas a medida que la intensidad del campo se va aumentando. Para contrastar, consideramos el llamado problema de Hofstadter [10], en el que se observa que el espectro de energía para un cristal bidimensional de un arreglo cuadrado sujeto a un campo magnético perpendicular al cristal conlleva a un espectro fractal, la llamada Mariposa de Hofstadter. Nos proponemos comparar los espectros resultantes en términos de tomar *“la raíz cuadrada de una mariposa”*.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la siguiente sección estudiamos la red cuadrada en ausencia de campos magnéticos y exploramos cómo surge el espectro de Hofstadter. Enseguida exploramos la red hexagonal. Estudiamos su estructura de bandas y la mariposa de Hofstadter para la red hexagonal, llamada mariposa de Hofstadter-Rammal [11] o de Hofstadter-Dirac, nombre que nosotros adoptamos. Para interpretar nuestros resultados, mostramos la equivalencia entre la red cuadrada (monopartita) con la hexagonal (bipartita), para después relacionar los espectros en ambos casos a través de la raíz cuadrada de la mariposa original. Este trabajo está basado en la tesis [12].

**Red Cuadrada**

Consideremos una red cuadrada, de espaciado La función de onda del sitio , es llamada , de acuerdo la Figura 1. Tomando en cuenta solamente la interacción con sus vecino cercanos, tenemos que [13]

,

donde es la integral transferencia o de salto. Usando el teorema de Bloch bidimensional [13],

,

podemos reducir la expresión en la forma

.

Con esto, obtenemos la forma del espectro de energía

.

el cual se muestra en la Figura 2. Notemos que la expansión para de la energía toma la forma,

.

donde es la masa efectiva del portador de carga. Esta es una relación cuadrática entre la energía y el momento, porque la dinámica en este arreglo cristalino es mejor descrita por la ecuación de Schrödinger.

**Influencia del campo Magnético**

Procedemos ahora incluir la influencia del campo magnético en el espectro de energía. Consideremos un campo magnético uniforme perpendicular al plano del cristal. Recordemos que el operador del momento es el generador de traslaciones espaciales,

,

donde es el operador de traslación, el cual nos da el valor de la función de onda desplazada en la forma

.

Si añadimos el campo magnético, el operador de momento se reemplaza por un operador que incluye al potencial vectorial magnético [13], mediante , que es la llamada sustitución de Peierls. Esto es, el efecto del campo magnético introduce un factor de fase extra en una función de onda trasladada. Así:

.

Si el camino a lo largo del cual realizamos la integración es cerrado, la función de onda trasladada adquiere un factor de fase de la forma, donde es el número flujos cuánticos que pasan a través de la superficie encerrada por el camino. Además, si el potencial magnético está definido en la norma de Landau, , podemos reducir un problema 2-dimensional a uno 1-dimensional. De esta forma, la función de onda se puede escribir como el producto de una onda plana que depende solamente de y una función que sólo depende de , es decir,

,

donde podemos observar que el efecto del campo magnético solamente está presente en la dirección del sistema coordenado. E teorema de Bloch, en este caso, adquiere la forma,

.

Con estos resultados, nuestra aproximación de amarre fuerte se escribe ahora como

.

Sin pérdida de generalidad, tomamos Así, obtenemos la forma final de la ecuación de amarre fuerte, llamada *ecuación de Harper*,

.

Esta ecuación también describe a un electrón que se mueve a lo largo de una cadena lineal en un potencial periódico . La ec. de Harper ha sido estudiada en gran detalle, por ejemplo, en la Ref. [14]. Es interesante observar que esta ecuación posee una dualidad cuando el flujo magnético es sustituido por su inverso, llamado . El espectro depende de , y se obtiene de diagonalizar el siguiente Hamiltoniano al tomar ,

donde es el potencial periódico. Los parámetros y corresponden a la transformación conjugada de una rotación conmensurable y una dilatación, que es una simetría del problema que estamos estudiando. Una rotación arbitraria de la red cristalina por un ángulo en general no deja invariante al cristal. Sin embargo, si tomamos

con y enteros, primos relativos, decimos que la rotación es conmensurable. Cuando además de la rotación conmensurable, hacemos una dilatación del espaciamiento interatómico de la red tal que los eigenestados de la nueva red rotada estén reescalados por el factor con

la operación conjugada de rotación conmensurable y dilatación es una simetría del sistema cristalino, lo cual es muy útil para explorar las simetrías del espectro de la ecuación de Harper [14]. Para diagonalizar el Hamiltoniano anterior , escribimos como con y enteros, primos relativos. Obtenemos así los eigenvalores para ese valor específico de Barriendo todo el intervalo del inverso de flujo magnético, obtenemos los valores permitidos de la energía como función de El resultado es el espectro conocido como la mariposa de Hofstadter [5], mostrado en la Figura 3. La mariposa de Hofstadter fue el primer fractal que se formuló en la física. Nos da una versión gráfica del espectro de energía de un electrón restringido a moverse en un potencial periódico bidimensional bajo la influencia de un campo magnético perpendicular. Para cada valor de , el espectro corresponde a valores discretos. Si fuera irracional, el espectro correspondería a un conjunto infinito, no numerable de valores, que de hecho es homeomorfo al conjunto de Cantor [10]. El hecho de que para valores irracionales de el espectro corresponda a un conjunto infinito de medida cero, hace que aun cuando se agregue el efecto de dichos valores, los niveles de energía se organizarán de acuerdo al patrón mostrado en la Figura 3. Podemos ver que el espectro posee dos ejes de simetría en y en El ancho de banda, es decir, el intervalo donde yacen todos los valores del espectro energía, es de pues el mínimo y el máximo eigenvalores de para cualquier valor de yace en el intervalo En nuestro caso tomamos por simplicidad. Réplicas de la figura de la mariposa, formada por las cuatro alas en forma de equis, se repiten reiteradamente al interior de la misma, escaladas por un factor que en general depende de la energía y del flujo magnético. Se dice entonces que la mariposa de Hofstadter tiene una estructura multifractal. A continuación nos proponemos repetir este ejercicio en el caso de la red hexagonal.

**Red Hexagonal**

Sabemos que el grafeno tiene una estructura cristalina de tipo de panal de abeja [5,8,9]. En otras palabras, es una red con una estructura hexagonal, como se muestra en la Figura 4. Analicemos el modelo de amarre fuerte para este cristal, considerando sólo interacciones de los vecinos cercanos. Ya que trabajamos con una celda unitaria que contiene dos átomos en ella, clasificamos los átomos en dos subredes triangulares y etiquetamos los sitios de una de ellas con (círculos blancos) y a los de la otra red con (círculos negros), como se aprecia en la Figura 4. La ecuación de amarre fuerte es

,

.

Ahora, los vectores primitivos de cada subred triangular son, . Estos vectores cumplen con , y en grafeno . Los vectores primitivos de la red recíproca y satisfacen, , por lo que podemos darles la siguiente representación, y . Entonces, el teorema de Bloch para la red hexagonal nos permite escribir,

,

.

Por otro lado, las funciones y son periódicas sobre la red recíproca, es decir, , , donde y , son enteros, lo que nos permite escribir

,

,

,

.

Si sustituimos estas expresiones en el sistema de ecuaciones de amarre fuerte, tenemos

,

Este nuevo sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como

.

De este modo, reducimos el problema de encontrar la estructura de bandas del panal de abejas a un problema de valores propios [15]. Elevando al cuadrado, tenemos que

,

de tal forma que los eigenvalores de la energía son

El espectro correspondiente se muestra en la Figura 5. Tiene forma periódica en las bandas de conductividad y de valencia, tocándose solamente en seis puntos, solo dos de los cuales son inequivalentes y son llamados puntos de Dirac. Entonces, las bandas de valencia y de conducción se tocan en puntos de Dirac, lo que nos dice que el grafeno no es metal ni aislante. Se le clasifica como un semimetal. Cuando podemos ver que

,

donde hemos identificado a con la velocidad de Fermi [8], que al remplazar los valores de la red cristalina, nos permite identificar . Este Hamiltoniano es equivalente al de Dirac reducido a un plano [7]. La energía contiene dos signos , lo que refuerza la idea de que la dinámica de los portadores de carga de la red hexagonal está gobernada por la ecuación de Dirac. La forma cónica de la bandas de conducción y valencia cerca de los puntos de Dirac son llamados conos de Dirac y es cerca de estos puntos donde precisamente se puede tener una descripción en términos completamente relativistas de un sistema de materia condensada [9]. Veamos el problema de Hofstadter para el grafeno.

**Mariposa de Hofstadter-Dirac**

Ahora estudiaremos el problema de Hofstadter para la red hexagonal. Como para la red cuadrada, todos los parámetros como la orientación del campo magnético, la norma de Landau, etc. se mantienen igual, solo notamos que la integral de transferencia es en la dirección horizontal y 1 en cualquier otra dirección. El efecto del campo magnético, es decir, la fase que toma la función de onda y que mide el flujo magnético en cada hexágono unitario, se refleja de la siguiente manera

,

.

Entonces, el espectro lo obtenemos de resolver estas ecuaciones acopladas. Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, luego de usar el teorema de Bloch para la red hexagonal, convertimos este sistema en un problema de eigenvalores que depende del inverso del flujo magnético. Al igual que antes, fijamos y calculamos los eigenvalores. Barriendo el rango completo de el resultado se muestra en la Figura 6. Podemos ver que el espectro posee dos ejes de simetría en y en . Además, aparecen dos mariposas similares a la cuadrada, una para y la otra para . Aparecen réplicas de ésta mariposa, formadas por las cuatro alas, que se repiten reiteradamente al interior de la misma, escaladas por un factor dependiente de la energía y del flujo magnético. La mariposa de Hofstadter-Dirac cuenta con una estructura multifractal. El espectro de energía que se muestra en la Figura 6 se obtuvo para Se puede ver que este espectro corresponde nuevamente a bandas o valores discretos de la energía y que el ancho del intervalo de energías en este caso es en general .

**Raíz cuadrada de una mariposa**

Una observación interesante ocurre cuando tomamos su cuadrado del Hamiltoniano de amarre fuerte para la red hexagonal,

Numéricamente se obtiene nuevamente el espectro de la mariposa de Hofstadter cuadrada. Un análisis más cercano nos revela que en realidad, dicho espectro está duplicado, uno con signo positivo y otro con signo negativo, y dadas las simetrías del mismo, parecen ser uno solo. Resulta sugerente, entonces, que el espectro correspondiente al cuadrado del Hamiltoniano para la mariposa de Hofstadter-Dirac resultaría en dos copias del espectro de Hofstadter, como se ilustra en la Figura. 7. Desde el punto de vista de la ecuación de Dirac, esto resulta natural, pues como hemos visto, en su forma no relativista, en la imagen de Foldy-Whouthuysen, el espectro posee dos signos con la raíz cuadrada del eigenvalor de Dirac. Sin embargo, esta equivalencia puede observarse también de estudiar la red hexagonal de la forma descrita a continuación.

Consideremos una nueva celda unitaria en la red hexagonal. Sea la nueva celda de tal forma que contenga dos átomos, vecinos cercanos. Por ejemplo, uno puede ver la Figura 4 los círculos blancos, que podemos tomar como los puntos de la red, y a cada uno de ellos asociarle el círculo negro que está justo arriba y un poco a su derecha, para formar la base de dos átomos distintos de esta estructura cristalina. Esta equivalencia también puede verse en forma analítica. Comenzaremos tomando la nueva celda unitaria [16] de dos átomos en la red hexagonal y etiquetaremos los átomos con y respectivamente. Enseguida, tomemos las interacciones con los vecinos cercanos de acuerdo con la Figura 4 y escribimos el Hamiltoniano correspondiente.

,

.

Notemos que la integral de salto en la dirección horizontal es diferente, en general, al de la dirección vertical. Para solucionar este problema, multiplicamos con a las funciones y para indicarlo. La equivalencia entre la red cuadrada de un átomo y la red hexagonal de dos átomos podemos obtenerla si tomamos la ecuación anterior, con , y realizamos dos operaciones por separado. La primera, una suma,

,

la otra operación que podemos realizar es la resta,

.

Con este sistema de ecuaciones obtenemos la energía final para la red hexagonal de dos átomos, la cual consta de dos ramas de energía la primera es llamada *“bonding”* o enlace (correspondiente a la suma), en la cual la propiedad a tomar en cuenta es y la segunda es llamada *“antibonding”* o antienlace (correspondiente a la resta) se tomará . Comenzaremos con los cálculos del bonding. La ecuación de la suma se reduce a,

.

Usamos ahora el teorema de Bloch bidimensional

,

la energía es entonces,

.

Un razonamiento análogo para el “antibonding”, nos conduce a la energía es,

.

Ambas soluciones de la energía se muestran en la Figura 8, donde la forma de estas energías encontradas es igual a la energía de la red cuadrada y es sólo la mitad, de acuerdo con la de la energía de la red cuadrada. De esta forma vemos que la suma de las dos ramas es igual o equivalente a la energía encontrada en la red cuadrada con una celda unitaria de un sólo átomo. La introducción del campo magnético se realiza en forma directa, con el razonamiento expuesto en la tercera sección de este trabajo. El ejercicio es directo y el lector interesado puede repetirlo de propia cuenta para verificarlo. Por tanto, confirmamos observación inicial presentada al principio de esta sección. Con esto damos por terminado el trabajo de investigación.

**Conlusión**

Para concluir, mencionaremos los resultados obtenidos de forma breve. El propósito principal de este trabajo es el estudio de la dinámica de los electrones planares en presencia de campos magnéticos externos.

En sistemas periódicos como sólidos cristalinos, el espectro de los electrones se encuentra formado por bandas de energía permitidas, separadas por brechas de energía prohibidas. Esta estructura de bandas permite analizar las propiedades de conducción de un material. Para el caso de una red cuadrada bidimensional sin campo magnético, vemos que el movimiento del electrón es gobernado por la ecuación de Schrödinger, y el correspondiente espectro de energía en forma de sábana periódica, Figura 2, con mínimos parabólicos.

Al introducir un campo magnético perpendicular al cristal, definiendo el potencial vector en la norma de Landau, el espectro se ve afectado solamente en una dirección, se rompe la degeneración y las bandas de energía comienzan a cruzarse. Esto ocasiona que en ciertas regiones aparezcan bandas de energía permitidas y en otras bandas prohibidas, ocasionando que el espectro tome una forma peculiar, conocida como la mariposa de Hofstadter, el cual tiene propiedades de multifractalidad.

Para la red bidimensional hexagonal, que es la estructura cristalina del grafeno, la estructura de bandas en ausencia de campos magnéticos es tal que las bandas de conducción y valencia se tocan en los puntos de Dirac, alrededor de los cuales, los grafinos o portadores de carga son mejor descritos mediante funciones de onda ultrarelativistas. Al introducir un campo magnético uniforme, la correspondiente mariposa de Hofstadter-Dirac posee una estructura intrincada, multifractal y que es como la adición de dos copias del espectro de la mariposa de Hofstadter ordinaria. Esto se observa más claramente tomando el cuadrado del Hamiltoniano de amarre fuerte para la red hexagonal. Esta doble degeneración la podemos atribuir al carácter bipartita de la red hexagonal tomando que es es equivalente a una red cuadrada monopartita y que duplica el espectro que encontramos con anterioridad.

El grafeno es excepcional por sus propiedades de dureza, conducción térmica, movilidad de sus portadores de carga, flexibilidad y otras que lo hacen atractivo como sucesor del silicio en aplicaciones nanotecnológicas. Por esto, concluimos que estudios de la naturaleza de este material arrojarán luz a posibles aplicaciones tecnológicas del mismo.

**Referencias**

[1] David J. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics”, 2a Ed. Pearson Prentice Hall, (2005), ISBN 0-13-111892-7.

[2] David J. Griffiths, “Introduction to Elementary Particles”, 1st. Ed. John Wiley & Sons Inc. (1987), ISBN 0-471-60386-4.

[3] L. L. Foldy y S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. 78,29–36 (1950).

[4] G. Murguía y A. Raya, J. Phys. A: Math. Gen. 43, 402005, (2010)

[5] Novoselov, K. S. et al. “Two-dimensional gas of massles Dirac fermions in graphene”. Nature 438, 197 (2005).

[6] F. H. M. Faisal “Adiabatic solution of Dirac equation graphinos in an intense electromagnetic field and emission of high order harmonics near the Dirac points”, arXiv:1102.1677v2 [cond-mat.mes-hall].

[7] S. Hernández Ortíz, G. Murguía y A. Raya, J. Phys. Condens. Matter 24, 015304 (2012).

[8] A. K. Geim and K. S. Novoselov, “The Rise of Grafene”, Manchester Center for Mesoscience and Nanotechnology, U. Manchester, Oxford Road M13 9PL, United Kindom.

[9] M. I. Katsnelson and K. S. Novoselov, Graphene: new bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics, Solid State Commun. I43, 3 (2007).

[10] D. R. Hofstadter, “Energy levels and wave fuctions of Bloch electrons in rational and irrational magnetics fields”, Phys. Rev. B 14, 2239 (1976).

[11] R. Rammal “Landau level of Bloch electons in a honeycomb lattice”, J. Physique

46, 1345, (1985) .

[12] J. Manuel González-Valdés, “Electrones planares en un campo magnético”, IFM-UMSNH (2012).

[13] C. Kittel “Introduction to Solid State Physics”, 7th ed. (Wiley, New York, 1996).

[14] A. Kunold,“Electrones de Bloch y Efecto Hall Cuántico”, Tesis Doctoral, Instituto de Física UNAM, (2003).

[15] R. Delbourgo, “On 2D Periodic Hexagonal Cells”, erXiv:1108.3817v1 [condmat.mtrl-sci].

[16] A. Matulis and F. M. Peeters, “Analogy between one-dimentional chain model and

graphene”, Am. J. Phys., 77 595, (2009).

**Agradecimientos**

Agradecemos a CIC-UMSNH y CONACyT por apoyos recibidos durante la elaboración de este trabajo. Agradecemos al Dr. Luis Villaseñor por sus atinados comentarios y cuidadosa lectura del manuscrito.

**LEYENDAS DE FIGURAS**

Figura 1. La red cristalina cuadrada. Los vecinos cercanos correspondientes al sitio se encuentran arriba y abajo, sobre la línea vertical, y a la derecha y a la izquierda, sobre la línea horizontal que pasan por dicho punto.

Figura 2. Estructura de bandas de energía para la red cuadrada bidimensional. El espectro es periódico en ambas direcciones. Los mínimos locales son aproximados de forma parabólica.

Figura 3. La mariposa de Hofstadter. Cada punto en el espectro corresponde a un valor permitido para la energía. El impacto del campo externo hache que dicho espectro adquiera una forma multifractal.

Figura 4. La red cristalina del grafeno. Posee una forma de panal de abeja.

Figura 5. Estructura de bandas del grafeno. Cerca de los puntos de Dirac, la estructura de bandas es cónica, por lo que en esta región, los grafinos se comportan relativistamente.

Figura 6. Mariposa de Hofstadter-Rammal o Hofstadter-Dirac. Cada punto en el espectro corresponde a un valor permitido para la energía. El impacto del campo externo hache que dicho espectro adquiera una forma multifractal.

Figura 7. El cuadrado del espectro de la mariposa hexagonal es dos veces el espectro de la mariposa cuadrada.

Figura 8. La equivalencia de la red hexagonal con dos copias de la estructura de bandas para la red cuadrada.















