

# Ciencia Nicolaita 89

ISSN: 2007-7068



Universidad  
Michoacana  
de San Nicolás  
de Hidalgo

## Evaluación de la difusividad térmica efectiva en el estado transitorio de una geometría fractal para condiciones de temperatura y flujo de calor constantes

## Evaluation of the effective thermal diffusivity in the transient state of a fractal geometry for constant temperature and heat flux conditions

Israel Rosas Yescas\*, José Eduardo Acosta Cano de los Ríos, Óscar Arturo Chávez López, Carlos Arturo Méndez Herrera, Víctor Manuel Ambriz Díaz

**Para citar este artículo:** Rosas Yescas Israel, Acosta Cano de los Ríos José Eduardo, Chávez López Óscar Arturo, Méndez Herrera Carlos Arturo y Ambriz Díaz Víctor Manuel, 2023. Evaluación de la difusividad térmica efectiva en el estado transitorio de una geometría fractal para condiciones de temperatura y flujo de calor constantes. Ciencia Nicolaita no. 89, 128-139. DOI: <https://doi.org/10.35830/cn.vi89.696>



### **Historial del artículo:**

Recibido: 7 de octubre de 2022

Aceptado: 22 de mayo de 2023

Publicado en línea: diciembre de 2023



**Ver material suplementario**



**Correspondencia de autor:** [israel.ry@chihuahua.tecnm.mx](mailto:israel.ry@chihuahua.tecnm.mx)



**Términos y condiciones de uso:** <https://www.cic.cn.umich.mx/cn/about/privacy>



**Envíe su manuscrito a esta revista:** <https://www.cic.cn.umich.mx/cn/about/submissions>



# Evaluación de la difusividad térmica efectiva en el estado transitorio de una geometría fractal para condiciones de temperatura y flujo de calor constantes

## Evaluation of the effective thermal diffusivity in the transient state of a fractal geometry for constant temperature and heat flux conditions

Israel Rosas Yescas\*, José Eduardo Acosta Cano de los Ríos, Óscar Arturo Chávez López, Carlos Arturo Méndez Herrera y Víctor Manuel Ambriz Díaz

División de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Chihuahua, Chihuahua, México

### Resumen

En este trabajo se comparan dos modelos para calcular la difusividad térmica efectiva usada en simulaciones de fenómenos transitorios con diferencias finitas de medios porosos con geometría fractal del tipo Alfombra de Sierpinsky. Se evalúa la coincidencia entre los resultados obtenidos utilizando estos modelos y simulaciones de elemento finito. Esta comparación se hace para dos condiciones: temperatura constante y flujo de calor constante y para diferentes valores de la porosidad. La simulación en elemento finito se hace utilizando el software Solidworks y las simulaciones con diferencias finitas utilizan el enfoque de equilibrio térmico local. Los resultados muestran que el modelado a utilizar depende de las condiciones del fenómeno a simular. El modelo utilizado reproduce de manera adecuada el efecto de la porosidad en la evolución temporal de la temperatura, pero la distribución espacial no se ve afectada por este parámetro.

**Palabras clave:** Difusividad térmica efectiva, Medio poroso, Fractal

### Abstract

In this work, two models to calculate the effective thermal diffusivity used in simulations of transient phenomena with finite differences of porous media with fractal geometry of the Sierpinsky Carpet type are compared. The agreement between the results obtained using these models and finite element simulations is evaluated. This comparison is performed for two conditions: constant temperature and constant heat flow and for different values of porosity. Finite element simulation is done by using Solidworks software and finite difference simulations use the local thermal equilibrium approach. The results show that depending on the phenomenon to be simulated, one of the

two models can be used. The model used adequately reproduces the effect of porosity on the temporal evolution of temperature, but the spatial distribution is not affected by this parameter.

**Keywords:** Effective thermal diffusivity, Porous medium, Fractal.

## Introducción

Los medios porosos son materiales compuestos donde una matriz sólida contiene diversas cavidades llenas de uno o varios fluidos y donde dichas cavidades son llamadas poros que pueden o no estar conectadas entre sí. La forma, tipo de conexión, tamaño y distribución de estos poros son algunas de las características que determinan el comportamiento o propiedades para este tipo de materiales. Debido a que cada material tiene una topología particular para sus poros y a que las propiedades dependen de su estructura, no es posible tener un modelo general aplicable a todos los materiales porosos. Dentro de las propiedades a estudiar en este tipo de materiales, aquellas relacionadas con los fenómenos de transporte son de particular interés en muchas áreas, especialmente las relacionadas con el manejo de la energía. Por un lado, se tiene que los medios porosos con celdas abiertas (interconectadas entre sí) son estudiados, por ejemplo, en sistemas geotérmicos de extracción de energía o en intercambiadores de calor. Por otro lado, los medios porosos con celdas cerradas tienen aplicaciones en sistemas de almacenamiento de energía o como materiales aislantes. Kovacit *et al.* (2017) investigaron experimentalmente muestras de una espuma metálica con celdas cerradas con material con cambio de fase que pueden ser una excelente alternativa para grandes radiadores de techo para una calefacción o refrigeración más eficiente. Jeng *et al.* (2015) describen la mejora en el elemento de disipación de calor de una lámpara led mediante una espuma metálica de celda cerrada. A pesar de su relevancia, las investigaciones de las propiedades de medios porosos con celdas cerradas son pocas si se comparan con aquellas para medios con celdas abiertas y muchas de estas investigaciones están enfocadas esencialmente en las propiedades estructurales o mecánicas, más que en propiedades de transporte de energía o masa. Estos fenómenos de transporte, son descritos por las propiedades termofísicas de los materiales y la mayoría

de los artículos existentes están enfocados en determinar la conductividad térmica efectiva,  $k_{ef}$ , en estado estacionario (Deng *et al.*, 2017; Lu *et al.*, 2014; Zhu *et al.*, 2014; Ohlsenbrugge *et al.*, 2016).

Para investigar el comportamiento térmico de los materiales porosos existen dos enfoques, el equilibrio térmico local LTE por sus siglas en inglés (*Local Thermal Equilibrium*) y el LTNE (*Local Thermal Non-Equilibrium*). El primero asume que la fase sólida y la fase de fluido tienen la misma temperatura y por tanto solo se necesita una ecuación de energía para modelar su comportamiento. El LTNE no hace tal suposición y por tanto el material requiere resolver dos ecuaciones de energía, una para cada fase. Los modelos basados en LTE han sido ampliamente utilizados y han probado ser bastante efectivos para muchos casos de transferencia de calor constante, sin generación interna de calor (Nakayama *et al.*, 2001; Quintard y Whittaker, 1995; Al-Nimr y Abu-Hijleh, 2002). Además de lo anterior, para el abordaje de los fenómenos de transporte en medios porosos se ha utilizado el concepto de fractal desde hace más de 20 años (Williams y Dawe, 1986; Tarafdar *et al.*, 2000) y los modelos basados en este tipo de geometría han ganado popularidad debido al relativamente pequeño número de parámetros que definen a un medio poroso fractal con geometría compleja. Algunos autores que han desarrollado modelos de la conductividad efectiva en fractales señalan que la dimensión del fractal,  $d_f$ , es un parámetro importante para determinar las propiedades termofísicas del mismo, ya que esta determina la heterogeneidad de la estructura del medio poroso resultante (Ma y Chen, 2015; Feng *et al.*, 2007; Yu y Cheng, 2002). Una dimensión fractal grande implica un material poroso más irregular.

## Planteamiento del problema

Conocer las propiedades efectivas es de vital importancia en aplicaciones de la ingeniería, ya que son datos de entrada cruciales para diversos estudios nu-

méricos sobre la transferencia de calor o masa en medios porosos, que apliquen algún modelo desarrollado. Además de la conductividad efectiva, otra propiedad relevante es la difusividad térmica efectiva,  $\alpha_{ef}$ , que determina el comportamiento transitorio de la difusión de calor en un material. Con el fin de evaluar un modelo adecuado de la difusividad térmica efectiva en una geometría fractal para su aplicación en simulaciones numéricas de procesos transitorios de transferencia de calor utilizando diferencias finitas, este trabajo analiza la coincidencia entre simulaciones realizadas mediante elemento finito y simulaciones con diferencias finitas del modelo planteado. Las comparaciones se harán para la evolución temporal de la temperatura en un elemento cuadrado con dimensiones  $L \times L$ , con temperatura inicial uniforme  $T_0$ . Como lo muestra la Figura 1, todas las fronteras del cuadrado están aisladas excepto una, la cual está sujeta a una de dos condiciones o casos: a) Temperatura constante en la pared,  $T_w$  y b) Flujo de calor constante en la pared,  $\dot{q}_w$ .

Para la simulación en elemento finito, se utiliza el software Solidworks, donde se construye un modelo tridimensional de la geometría fractal y se somete las condiciones térmicas adecuadas. Aunque la geometría es 3D, su espesor unitario y las características de modelado la equiparan a un elemento que puede analizarse como bidimensional. En cuanto a las simulacio-

nes con diferencias finitas se utiliza un esquema basado en diferencias centradas y se realizan bajo el enfoque LTE para medios porosos.

## Geometría fractal

Para las simulaciones en elemento finito se utiliza la geometría fractal bidimensional conocida como alfombra de Sierpinski. Las alfombras de Sierpinski son una clase especial de fractales bidimensionales que están determinados por un generador que es un cuadrado dividido en  $n \times n$  subcuadrados congruentes,  $m$  de estos son negros y los otros  $n^2 - m$  son blancos. Los subcuadrados negros permanecen, mientras que los blancos deben ser eliminados. En la siguiente etapa de iteración, cada uno de los restantes subcuadrados se subdivide nuevamente en  $n \times n$  subcuadrados iguales y el patrón del generador se repite. Este procedimiento de construcción repetido *ad infinitum*, genera una alfombra de Sierpinski autosimilar de dimensión fractal  $d_f = \log(m) / \log(n)$  (Falconer, 1997). Para este caso se tomaron  $m=8$  y  $n=3$  y se realizó el estudio hasta la cuarta iteración obteniéndose las geometrías de la Figura 2. La dimensión fractal para geometría utilizada corresponde a un valor  $d_f = 1.893$ . La iteración cero corresponde a la superficie sólida.

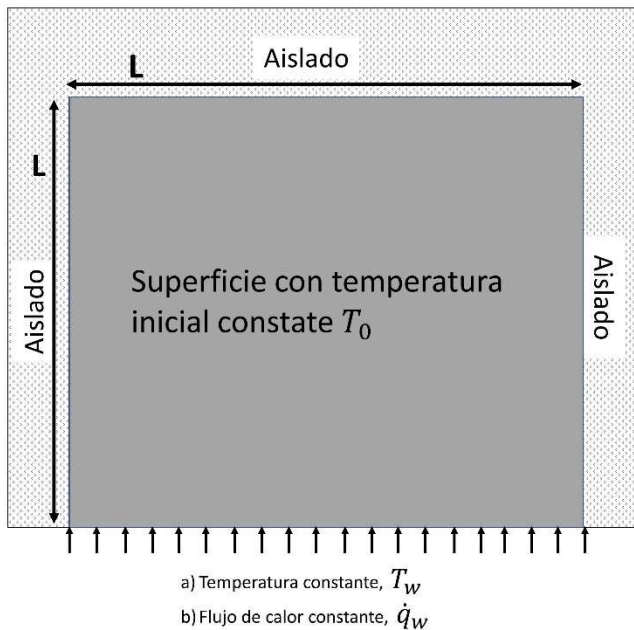


Figura 1. Esquema del problema planteado.

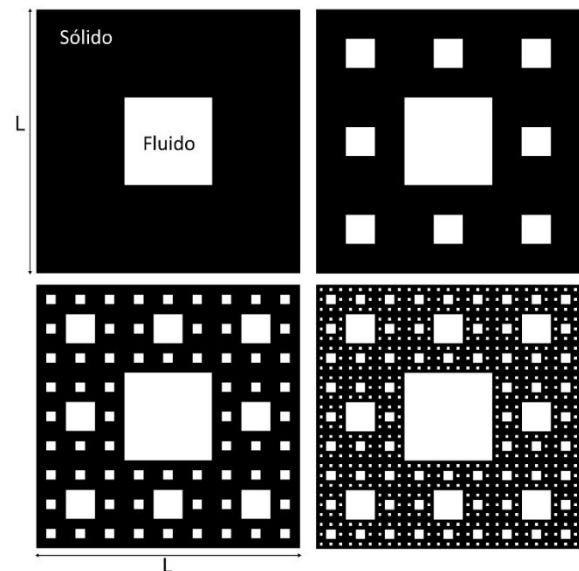


Figura 2. Iteraciones analizadas de la alfombra de Sierpinski.

**Porosidad para la geometría fractal**

La porosidad  $\phi$  de un medio es la relación del volumen ocupado por el fluido en el medio respecto al volumen total, de la forma:

$$\phi = \frac{Vol_f}{Vol_{tot}} \tag{1}$$

Para el caso de la carpeta de Sierpinski analizada en este trabajo, las zonas claras representan el espacio ocupado por algún fluido y las zonas oscuras el espacio correspondiente al sólido. De esta manera, la porosidad para la *j*-ésima iteración está determinada en la forma según Liang *et al.* (2014):

$$\phi = \sum_{i=1}^j \left[ \left(\frac{1}{n^i}\right)^2 \times m^{i-1} \right], \tag{2}$$

la cual se reduce a:

$$\phi = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^j, \tag{3}$$

para los parámetros *m* y *n* utilizados.

La Tabla 1 muestra la porosidad  $\phi$  que caracteriza las geometrías simuladas con el método de elemento finito.

**Tabla 1**

Valores de la porosidad para las iteraciones del fractal.

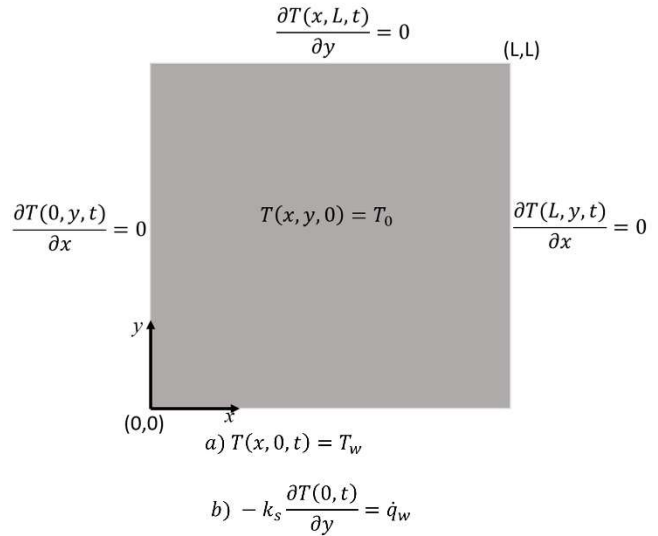
<i>j</i> -ésima iteración	$\phi$
0	0
1	0.1111
2	0.2098
3	0.2976
4	0.3757

**Modelo matemático**

Para las simulaciones con diferencias finitas el planteamiento para los casos: a) y b) se muestra en la Figura 3.

Bajo este modelo el comportamiento térmico de la fase sólida del medio poroso se rige por la ecuación:

$$(1 - \phi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + (1 - \phi) \dot{q} = (1 - \phi) (\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t}, \tag{4}$$



**Figura 3.** Planteamiento del problema para su resolución con diferencias finitas

donde *k* es la conductividad térmica, *T* es la temperatura;  $\dot{q}$  la generación de calor, *c* es el calor específico y *t* el tiempo, el subíndice “s” se refiere a la fase sólida.

Por otra parte, para un fluido incompresible la ecuación es:

$$\phi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \phi \dot{q} = \phi (\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{V} \cdot \nabla T_f, \tag{5}$$

donde el subíndice “f” hace referencia a fluido.

Con el fin de simplificar las ecuaciones, se considera que ambas fases están a la misma temperatura, por tanto:

$$T = T_f = T_s \tag{6}$$

y el sistema de las ecuaciones (3) y (4) se reduce a la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot (k_{ef} \nabla T) + \dot{q}_{ef} = (\rho c)_{ef} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{V} \cdot \nabla T, \tag{7}$$

donde:

$$(\rho c)_{ef} = (1 - \phi) (\rho c)_s + \phi (\rho c)_f, \tag{8}$$

$$k_{ef} = (1 - \phi) k_s + \phi k_f, \tag{9}$$

$$\dot{q}_{ef} = (1 - \phi) \dot{q}_s + \phi \dot{q}_f = 0. \tag{10}$$

Con esto se tiene solo una ecuación que modela el medio poroso como un medio continuo con propiedades globales. El subíndice “*ef*” denota propiedades termofísicas efectivas.

Para el caso de este trabajo no se considera generación de calor,  $\dot{q} = 0$ , y la velocidad del fluido en el poro se considera muy pequeña  $\vec{V} \approx 0$ . Lo anterior, aunado a las condiciones de frontera planteadas en la Figura 2 hacen que la ecuación (7) puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{(\rho c)_{ef}}{k_{ef}} \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_{ef} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (11)$$

Donde  $\alpha_{ef}$  es la difusividad térmica efectiva. Con las condiciones:  $\frac{\partial T(L,t)}{\partial y} = 0$ ,  $T(y, 0) = T_0$  y para el caso a)  $T(0, t) = T_w$  y para el caso (b) y  $-k_s \frac{\partial T(0,t)}{\partial y} = \dot{q}_w$ .

Esta ecuación es ahora unidireccional transitoria, que es la ventaja del enfoque LTE y debe ser resuelta para las condiciones de frontera establecidas.

## Difusión térmica efectiva para el caso estudiado

El medio poroso simulado lo constituye una matriz sólida de aluminio con los poros llenos de aire. La Tabla 2 muestra las propiedades de estos materiales:

**Tabla 2**

Propiedades de los materiales del elemento simulado.

	$k$ (W/m K)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c$ (J/kg K)
<b>Aluminio 1060</b>	200	2700	900
<b>Aire</b>	0.024	1	800

De esta manera las variables para las ecuaciones (8) y (9) quedan como se muestra en la Tabla 3.

**Tabla 3**

Valores de las propiedades de las fases sólida y fluida.

$k_s$	=	200	W/m K
$(\rho c)_s$	=	243 x10 <sup>4</sup>	J/m <sup>3</sup> K
$k_f$	=	0.024	W/m K
$(\rho c)_f$	=	800	J/m <sup>3</sup> K

Se puede observar en la Tabla 3 la diferencia en órdenes magnitud que existe entre los valores para la fase sólida y la fase fluida. Por tanto, se prevé que las propiedades efectivas sean dominadas por las propiedades de la fase sólida. Lo anterior hace pensar en que el modelo para las diferencias finitas puede aproximarse utilizando los valores de las propiedades de la fase sólida y los valores de la porosidad como únicos parámetros para calcular la difusividad térmica efectiva. Sustituyendo los valores de la Tabla 3 y utilizando un valor de  $\phi = 0.375$  en las ecuaciones (7) y (8) se tiene que  $(\rho c)_{ef} = 1.51 \times 10^6$  J/m<sup>3</sup> K y  $k_{ef} = 124$  W/m K. Si se calculan las propiedades efectivas utilizando únicamente los valores de la matriz sólida de tienen prácticamente los mismos valores, es decir:

$$(\rho c)_{ef} \cong (1 - \phi)(\rho c)_s \quad (12)$$

y

$$k_{ef} \cong (1 - \phi)k_s \quad (13)$$

El problema con las ecuaciones (12) y (13) es que si solo se toman esos valores, la difusividad térmica efectiva se reduce a la difusividad térmica de la matriz sólida.

$$\alpha_{ef} = \frac{(\rho c)_{ef}}{k_{ef}} \cong \frac{(1-\phi)(\rho c)_s}{(1-\phi)k_s} = \alpha_s \quad (14)$$

Tomarlo de esta manera es incorrecto dado que la porosidad afecta el comportamiento del medio. Como alternativa se puede establecer que la difusividad térmica efectiva depende del valor  $(1 - \phi)$  y de manera semejante a las ecuaciones (12) y (13) se proponen dos alternativas para la difusividad térmica efectiva. La primera siendo proporcional al término  $(1 - \phi)$  de la forma:

$$\alpha_{ef} = \alpha_s (1 - \phi), \quad (15)$$

y la segunda siendo inversamente proporcional al mismo término en la forma:

$$\alpha_{ef} = \frac{\alpha_s}{(1-\phi)}. \quad (16)$$

Con el fin de evaluar cuál de las opciones es la más idónea para calcular  $\alpha_{ef}$ , ambas ecuaciones se utilizan para resolver la ecuación (11) mediante diferencias finitas. Con esto se pretende tener:

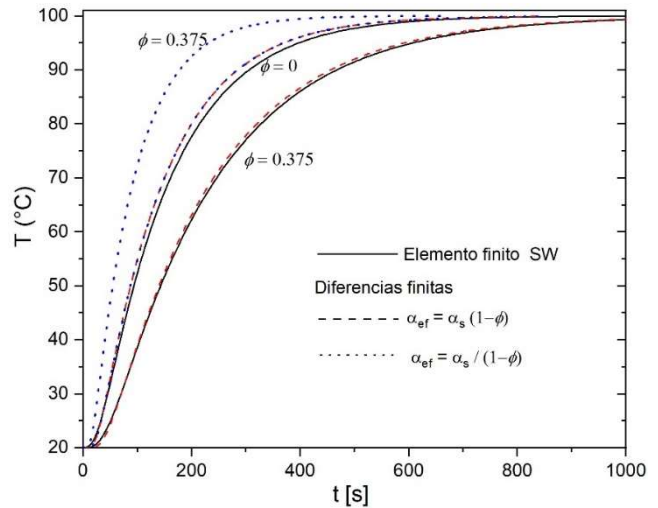
- La evolución temporal de la temperatura en algún punto de la geometría.
- La distribución espacial de la temperatura a través de la longitud del elemento en un tiempo determinado.

## Resultados

Tanto para el caso de temperatura constante en la base como para flujo de calor constante, se tomó un elemento con  $L= 0.182$  m y temperatura inicial  $T_0= 20$  °C. Para el caso de temperatura constante en la base se tomó  $T_w = 100$  °C y para el caso de flujo de calor constante en la base se tomó  $\dot{q}_w = 12$  kW/m<sup>2</sup>. Estos parámetros se utilizaron tanto en la solución de la ecuación (11) como en el estudio con elemento finito.

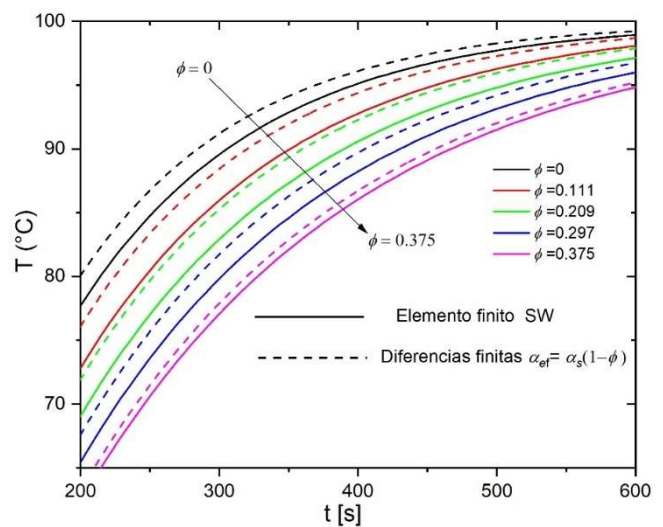
### Temperatura constante en la base

La Figura 4 muestra la evolución temporal de la temperatura en el extremo de la placa,  $y=L$ , tanto para la simulación en elemento finito como para la simulación en diferencias finitas. Para esta última se muestra la evolución utilizando las ecuaciones (15) y (16) para calcular la difusividad térmica efectiva. Para el caso de la placa sólida,  $\phi = 0$ , tanto la simulación de elemento finito como las ecuaciones (15) y (16) tienen una gran coincidencia. Sin embargo, conforme la porosidad aumenta, las diferencias entre una y otra ecuación son más evidentes. Para  $\phi = 0.375$  es claro que la ecuación (15) modela de manera más precisa la evolución temporal de la temperatura, existiendo mínimas diferencias entre la simulación de elemento finito y la solución de la ecuación (11). El uso de la ecuación (16) indica que el medio poroso tiene una mayor difusividad térmica que el sólido, dado que el extremo de la placa se calienta más rápido. De cierta manera esto resulta contraintuitivo, ya que los espacios ocupados por el fluido reducen la capacidad del material para conducir la energía y provocan que este se comporte más como aislante. Este comportamiento de tipo aislante lo representa de manera adecuada el uso de la ecuación (15).



**Figura 4.** Evolución temporal de la temperatura en el extremo del elemento para los valores extremos de la porosidad.

La coincidencia entre la ecuación (11) y los resultados para elemento finito se aprecia mejor en la Figura 5, donde se hace un acercamiento a la parte central. En esta figura se puede observar cómo es que, a pesar de haber coincidencia en la tendencia, las gráficas muestran diferencia significativa para los valores intermedios de la porosidad,  $0 < \phi < 0.375$ . Es notable que la cuarta iteración sea la que mayor semejanza tenga con los resultados para elemento finito y por tanto, es razonable suponer que la siguiente iteración presentaría una mayor coincidencia. Aunque como se mencionó arriba, el comportamiento del medio po-



**Figura 5.** Efecto de la porosidad en la evolución temporal de la temperatura para las simulaciones con elemento finito y las simulaciones con diferencias finitas.

roso como medio aislante es esperado, la Figura 5 proporciona una manera de ver el comportamiento del medio modelado y del error que se tiene al suponer difusividades efectivas con la ecuación (15) en función de la porosidad del medio utilizado.

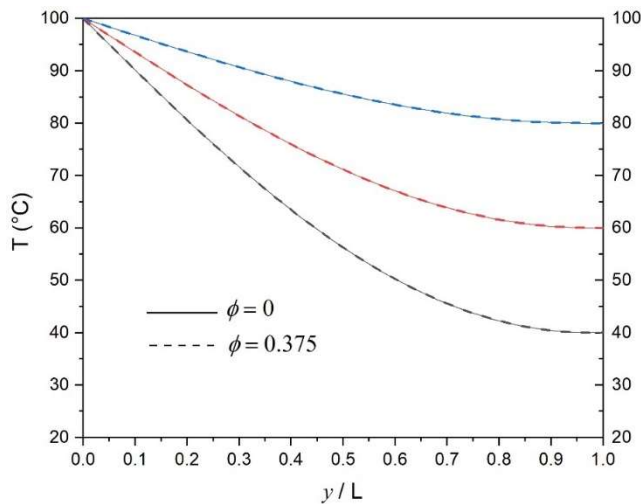
Dado que se tiene el propósito de evaluar la distribución espacial y con el fin de tener una comparación más adecuada entre las simulaciones, en lugar de tomar la distribución espacial de la temperatura para un tiempo específico para todas las simulaciones, se toman las distribuciones espaciales para un tiempo  $t$ , tal que en ese tiempo la temperatura en el punto  $y = L$ , alcanza un valor predeterminado. Se toman tres valores de esta temperatura  $T_1(L, t_1) = 40\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2(L, t_2) = 60\text{ }^\circ\text{C}$ , y  $T_3(L, t_3) = 80\text{ }^\circ\text{C}$ , estos valores son comunes tanto para los resultados con diferencias finitas como para los resultados con elemento finito. La Figura 6 muestra el perfil de distribución espacial de la solución obtenida con diferencias finitas de la ecuación (11) para los valores extremos de la porosidad. Se puede observar que no hay diferencia en los perfiles de temperatura a lo largo del elemento y por tanto valores intermedios de  $\phi$  mostrarían exactamente los mismos perfiles. Esto es natural, dado que la ecuación (11) modela un sólido homogéneo y la difusividad térmica efectiva solo afecta el tiempo en que se alcanza la temperatura establecida, por lo que la distribución espacial de la temperatura no cambia.

Sin embargo, para la distribución espacial del sólido obtenida por elemento finito, si se tienen notables diferencias para cada valor de la porosidad. En la

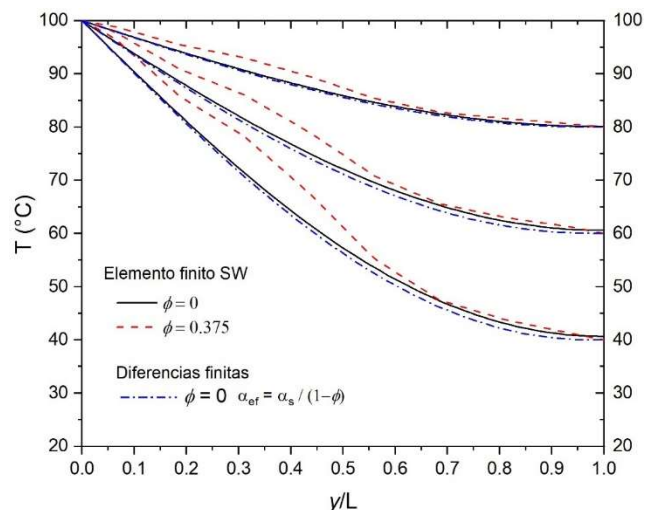
Figura 7 se puede apreciar que el perfil de temperaturas a lo largo del medio poroso cambia con la porosidad. Esta diferencia en la distribución espacial disminuye a medida que se alcanza la temperatura de la pared, y es más evidente al inicio del fenómeno. También puede observarse en la misma figura que las distribuciones espaciales para la solución con diferencias finitas y para los datos con elemento finito son prácticamente iguales en el caso de un sólido homogéneo,  $\phi = 0$ . La Figura 8 muestra los perfiles de temperatura espaciales para  $T_1(L, t_1) = 40\text{ }^\circ\text{C}$  y todos los valores de la porosidad, obtenidos de la simulación con elemento finito. Como se mencionó anteriormente, la diferencia en los perfiles espaciales de temperatura cambian con el valor de la porosidad, sin embargo, como puede observarse en la Figura 8, estas diferencias parecen estabilizarse al llegar a un valor de porosidad de  $\phi = 0.209$ . Esto tiene sentido si se considera que para valores de porosidad  $\phi < 0.209$  la geometría presenta irregularidades muy marcadas (Fig. 3) y valores mayores de porosidad implican una geometría más “homogénea”.

### Flujo de calor constante

La Figura 9 muestra la evolución temporal de la temperatura en el punto  $y = L$  para el caso de flujo de calor constante. Se muestran los perfiles para los datos de la simulación con elemento finito, así como los resultados de diferencias finitas. Puede observarse que, en el caso del elemento sólido, las tres curvas tienen la misma tendencia, sin embargo, para el valor



**Figura 6.** Distribución espacial de la temperatura a lo largo de elemento obtenida con diferencias finitas utilizando las ecuaciones (11) y (15).



**Figura 7.** Perfil de temperatura a lo largo del medio poroso para las simulaciones de elemento finito y diferencias finitas.



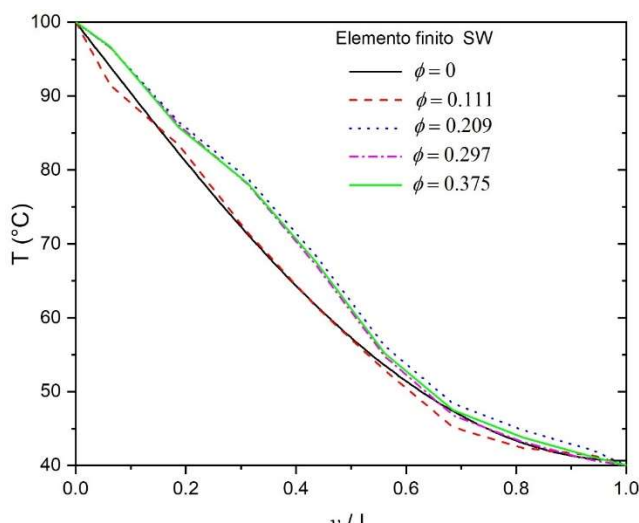
más alto de la porosidad,  $\phi = 0.375$ , existe una gran diferencia entre la solución que utiliza la ecuación (15) y la solución correspondiente a la ecuación (16). En este caso, dadas las condiciones, la temperatura nunca llegaría a un estado estacionario y seguiría aumentando indefinidamente con el tiempo. Por tanto, la gráfica muestra un total de 1000 segundos, tiempo durante el cual el punto  $y = L$  del sólido,  $\phi = 0$ , alcanza una temperatura aproximada de 50 °C. Puede observarse en la Figura 9 que, para la porosidad más alta, este tiempo se reduce a casi a la mitad y dicho punto alcanza esa temperatura en aproximadamente 600 segundos, que es similar al tiempo que se tiene con la curva asociada a la ecuación (16). Por otro lado, la ecuación (15) incrementa este tiempo haciendo que en los 1000 s de la gráfica, el valor de la temperatura solamente alcance los 37.5 °C. Tomando como referencia la tendencia marcada por la simulación en elemento finito es claro que la ecuación (16) aproxima de manera más adecuada el efecto de la porosidad en el flujo de calor del medio poroso.

La Figura 10 muestra las curvas obtenidas con la simulación de elemento finito para la geometría fractal para diferentes valores de la porosidad y la correspondiente curva obtenida con diferencias finitas. Se puede apreciar que, en todos los casos, las curvas de diferencias finitas presentan tiempos menores para alcanzar la misma temperatura que el elemento fractal. Sin embargo, observando la Figura 10 se nota que la curva para la geometría fractal y la curva de la solu-

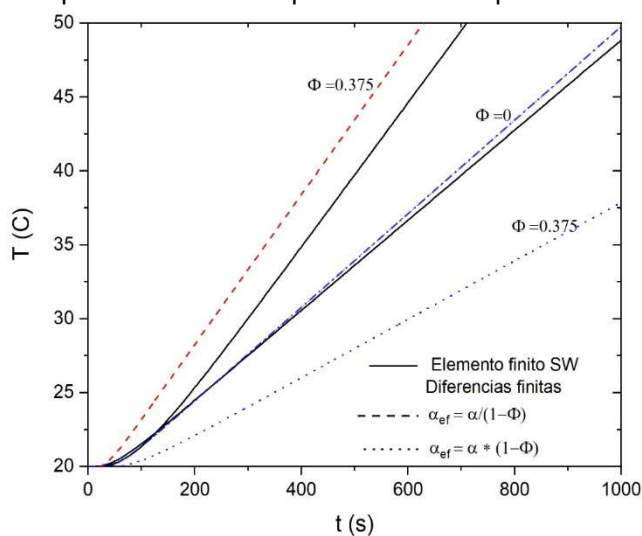
ción de elemento finito para la misma porosidad tienen pendientes iguales y la diferencia en sus valores se debe a la evolución temporal al inicio del fenómeno, durante los primeros 150 segundos, donde de hecho las curvas obtenidas por la simulación con elemento finito tienen el mismo comportamiento.

Para analizar la distribución espacial de la temperatura, al igual que para el caso de temperatura constante, se seleccionaron los perfiles en tiempos tales que en el punto  $y = L$  se alcanzaran temperaturas establecidas. Se tomaron tres perfiles para  $T_1(L, t_1) = 30$  °C,  $T_2(L, t_2) = 40$  °C, y  $T_3(L, t_3) = 50$  °C. La Figura 11 muestra este perfil de temperaturas a lo largo de la pieza para estas tres temperaturas. En esta gráfica se puede observar que el perfil resultante de la simulación con diferencias finitas es idéntico para los dos valores extremos de la porosidad, lo que indica que dicho perfil no depende de este parámetro. Los perfiles antes mencionados a su vez coinciden con el perfil que se obtiene para la simulación con elemento finito correspondiente al sólido,  $\phi = 0$ .

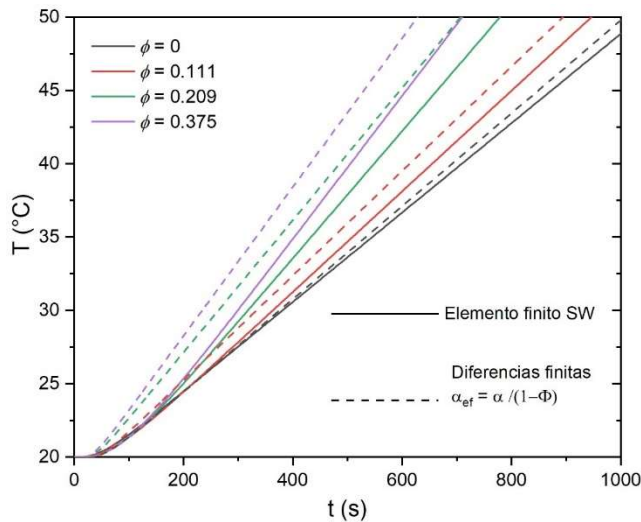
Por otra parte, la Figura 12 muestra que los perfiles de temperatura a lo largo de la geometría fractal simulada en elemento finito dependen de la porosidad. Se observa que la diferencia de temperatura entre un extremo y el otro del fractal aumenta conforme se incrementa la porosidad  $\phi$ . Sin embargo, esta diferencia es constante para las tres temperaturas tomadas, es decir que se mantiene a lo largo del tiempo. También se observa que las mayores diferencias entre los perfiles para cada valor de porosidad son especialmente



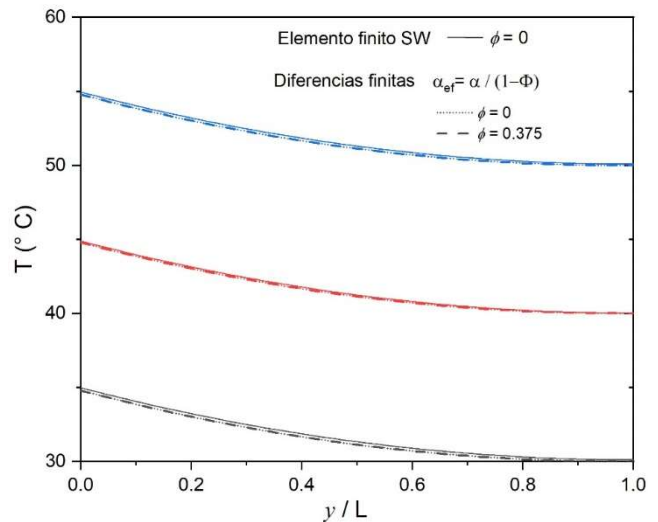
**Figura 8.** Perfil de temperaturas para diferentes valores de la porosidad cuando se alcanza una temperatura de 40 °C en el extremo del elemento.



**Figura 9.** Evolución temporal de la temperatura en el extremo del elemento.



**Figura 10.** Evolución temporal de la temperatura para diferentes valores de la porosidad.

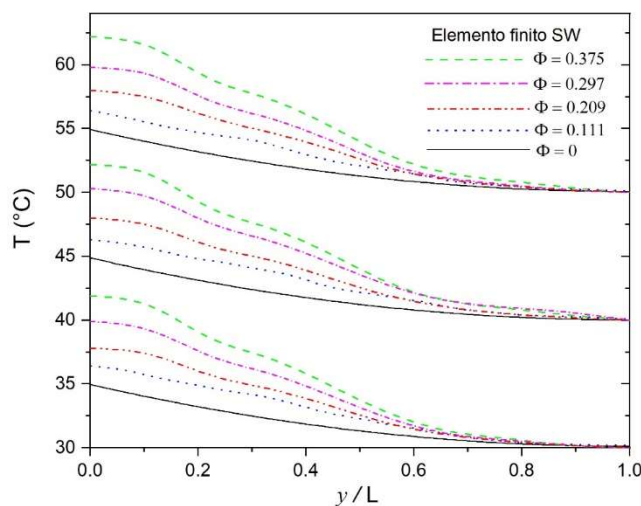


**Figura 11.** Distribución espacial de la temperatura en para el caso de flujo de calor constante.

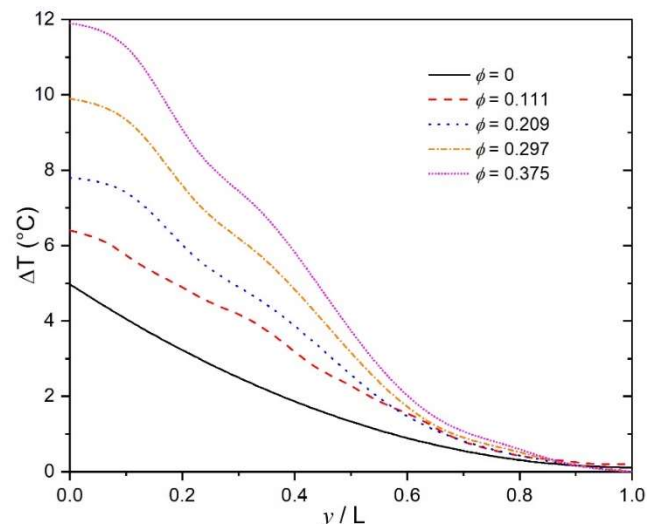
marcadas hasta la posición  $y/L = 0.6$ , después de esa distancia la diferencia entre cada perfil es mínima. La Figura 13 muestra la diferencia de temperaturas entre extremos del fractal a lo largo de su longitud. Se observa que para un valor de  $\phi = 0$  la diferencia es de solo 5 °C mientras que para un valor de  $\phi = 0.375$  esta diferencia aumenta hasta los 12 °C. Como se mencionó en líneas anteriores, los perfiles indican que los gradientes de temperatura en la pared sujeta al flujo de calor son mayores que en el extremo opuesto, incrementándose dichos gradientes con la porosidad.

## Conclusiones

En este trabajo se presentó la comparación entre los resultados de la simulación en elemento finito de una geometría fractal y los resultados de simulaciones en diferencias finitas para el estado transitorio utilizando el enfoque LTE para medios porosos. Se obtuvieron los perfiles temporal y espacial de la temperatura para un elemento cuadrado aislado en tres de sus fronteras y con condiciones de temperatura y de flujo de calor constante en la restante. Los resultados de las simulaciones utilizando diferencias finitas se obtuvieron para dos planteamientos del cálculo de la difusividad térmica efectiva. Después de analizar los resultados se tienen las siguientes conclusiones:



**Figura 12.** Perfil de temperatura a lo largo del fractal para diferentes porosidades.



**Figura 13.** Diferencia de temperatura entre los extremos del fractal para diferentes porosidades.

1. Para la condición de temperatura constante, la ecuación que modela el fenómeno de manera más adecuada es el que utiliza la ecuación (15) para calcular la difusividad efectiva como función de la porosidad. La evolución temporal de la temperatura obtenida utilizando dicha ecuación tiene buena coincidencia con los resultados de la simulación de elemento finito. Es importante notar que la coincidencia es mejor conforme aumenta la porosidad del medio. La distribución espacial, por otro lado, no presenta tan buena coincidencia, dado que los resultados con diferencias finitas muestran un perfil constante, correspondiente a un medio homogéneo y los resultados de la simulación de elemento finito muestran irregularidades en el perfil debidas a las irregularidades propias del elemento fractal.
2. Con base en estos resultados, puede decirse que la ecuación (15) puede ser utilizada para calcular la difusividad térmica efectiva cuando se quiere modelar el estado transitorio de transferencia de calor de una geometría fractal del tipo alfombra de Sierpinsky, sujeta a condiciones de temperatura constante.
3. Para la condición de flujo de calor constante, se tiene que la ecuación que mejor representa la evolución temporal de la temperatura es la ecuación (16), donde las curvas del estado transitorio obtenidas con diferencias finitas muestran una buena coincidencia con aquellas obtenidas con elemento finito para la misma condición. Sin embargo, las simulaciones hechas con diferencias finitas no reflejan la distribución espacial ni los gradientes de temperatura presentes en los resultados obtenidos con la simulación de elemento finito.
4. Con base en los resultados se puede concluir que la ecuación (16) es adecuada para modelar la evolución temporal de la temperatura para una geometría fractal del tipo carpeta de Sierpinski bajo condiciones de flujo de calor constante.

Los puntos anteriores, indican que el modelado del estado transitorio de un medio poroso de tipo alfombra de Sierpinsky, depende de las condiciones que se tengan en el fenómeno. Condiciones de temperatura y calor constantes no se pueden modelar utilizando la misma difusividad efectiva, es decir, a pesar de que sea la misma geometría y misma

porosidad, el hecho de cambiar las condiciones de frontera requiere un cambio de las ecuaciones utilizadas. Los resultados muestran, que de hecho, el utilizar una u otra ecuación produce resultados no solo erróneos, sino con el comportamiento opuesto. El utilizar el modelo de difusividad efectiva adecuado produce buenos resultados y los fenómenos transitorios en medios porosos de tipo alfombra de Sierpinsky, se pueden reproducir de manera adecuada.

## Referencias

- Al-Nimr, M., Abu-Hijleh, B. 2002. Validation of thermal equilibrium assumption in transient forced convection flow in porous channel. *Transp. Porous Media*, 49:127-138.
- Deng, Z., Liu, X., Huang, Y., Zhang, C., Chen, Y. 2017. Heat conduction in porous media characterized by fractal geometry. *Energies*, 10(8):1230.
- Falconer, K. 1997. *Techniques in Fractal Geometr.* Chichester, UK: Wiley.
- Feng, Y., Yu, B., Zou, M., Xu, P. 2007. A generalized model for the effective thermal conductivity of unsaturated porous media based on self-similarity. *J. Porous Media*, 10:551-56.
- Jeng, T., Tzeng, S., Lin, Y. 2015. Experimental study of heat transfer enhancement of inserted LED lamp by the closed-cell aluminum-foam ceiling. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 66:233-239.
- Kovacik, J., Spanielka, J., Dvorak, T., Oslanec, P., Jr, Jerz, J. 2017. Closed cell aluminum foams with phase change material. *Metallic Foams*, 1(1):42-48.
- Liang, L., Boming, Y., Xiangfeng, Z. 2014. Numerical simulation of tortuosity for fluid flow in two-dimensional pore fractal models of porous media. *Fractals*, 22(4):1-7.
- Lu, G., Su, B., Li, Z., Wang, Z., Song, W. 2014. Thermal properties of closed-cell aluminum foam with circular pores. *Thermal Science*, 18(5):1619-1624.
- Ma, Q., Chen, Z. (2015). Lattice Boltzmann simulation of multicomponent noncontinuum diffusion in fractal porous structures. *Phys. Rev. E*, 92:013025.
- Nakayama, A., Kuwahara, F., Sugiyama, M., Xu, G. 2001. A two-energy equation model for conduction and convection in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44(22):4375-4379.



- Ohsenbrugge, C., Marth, W., de Sosa, I., Drossel, W., Voigt, A. 2016. Reduced material model for closed cell metal foam infiltrated with phase change material based on high resolution numerical studies. *Applied Thermal Engineering*, 94:505-512.
- Quintard, M., Whitaker, S. 1995. Local thermal equilibrium for transient heat conduction: theory and comparison with numerical experiments. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38:2779–2796.
- Tarafdar, S., Franz, A., Schulzky, C., Hoffmann, K. 2000. Modelling porous structures by repeated Sierpinski carpets. *Physica A*, 292:1–8.
- Williams, J., Dawe, R. 1986. Fractals – an overview of potential applications to transport in porous media. *Transport Porous Med* 1:201–209.
- Yu, B., Cheng, P. 2002. Fractal models for the effective thermal conductivity of bidispersed porous media. *J. Thermophys. Heat Transf.*, 16:22–29.
- Zhu, X., Ai, S., Lu, X., Ling, X., Zhu, L. 2014. Thermal conductivity of closed-cell aluminum foam based on the 3D geometrical reconstruction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 72:242-249.