

La calculadora gráfica como apoyo al entendimiento de la modelación matemática

José Carlos Cortés y Fernando Hitt

Facultad de Físico-Matemáticas, UMSNH (jcortes@umich.mx)
y Departement de Mathématiques, Université du Québec à Montréal (Fernando.hitt@uqam.ca).

Resumen

En el siguiente escrito muestra como el uso de la tecnología, en particular el software de geometría dinámica que utiliza la calculadora Ti-nspire Cas, resulta un apoyo para los estudiantes en el entendimiento de los problemas de modelación matemática. Para ello se realizó una actividad con estudiantes de licenciatura en matemáticas a los cuales primeramente se les pidió resolver un problema en lápiz y papel, posteriormente se uso geometría dinámica para resolverlo y como etapa final, dieron un modelo, y la solución en papel y lápiz del mismo problema.

Abstract

The following paper shows how the use of technology, including dynamic geometry software that uses the Ti-nspire Cas calculator, is to support students in understanding the problems of mathematical modeling. This activity was conducted with undergraduate students in mathematics which first were asked to solve a problem with pencil and paper, then dynamic geometry was used to resolve and as a final step, gave a model, and the solution on paper and pencil the same problem.

1. Introducción

Mucho se ha escrito sobre los beneficios que el uso de la tecnología aporta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Uno de los puntos iniciales en el proceso de aprendizaje para resolver situaciones problema es el hecho de que el estudiante entienda qué es lo que se le pide resolver, en este sentido se exponen los resultados de una investigación relacionada con ¿cómo lograron los estudiantes entender un problema de modelación matemática después de que hicieron uso de la geometría dinámica de la calculadora TI-Nspire. Se tomó como base el tratamiento Tarea-Técnica Teoría (TTT) desarrollada por la escuela francesa (ver, p. e. Artigue, 2002; Lagrange, 2000 y 2003; Hitt & Kieran, en prensa), que permitió visualizar el avance de dicho entendimiento.

Para ejemplificar este punto de vista, se tomará el tema de modelación matemática. Sabemos que para los estudiantes, la modelación matemática es uno de los temas más difíciles de adquirir en el aprendizaje de las matemáticas, ya que dada una situación (seguramente en un contexto físico), se requieren de diferentes tipos de habilidades y conocimientos para llegar a su modelación desde el punto de vista de la matemática.

En referencia a la modelación matemática, Confrey y Maloney (2007, p. 61), exponen que:

la modelación matemática es el proceso de encontrarse con una situación indeterminada, problematizarla y traerla a investigación, razonamiento y estructuras matemáticas para llevar a transformar la situación. El proceso de modelación produce un resultado —un modelo— el cual es una descripción o una representación de la situación.

En términos específicos, la modelación matemática frecuentemente implica la búsqueda de una función como modelo matemático que permite analizar el fenómeno y explicarlo con ese modelo. Desde nuestro punto de vista, en la formación de conceptos, **no necesariamente debemos restringirnos a la representación algebraica**. De hecho, por tomar otro ejemplo, la modelación matemática puede ser a través de la representación gráfica de una función. Aquí es importante recordar que, **en el aprendizaje de las matemáticas, todas las representaciones de un concepto deben ser consideradas al mismo nivel cognitivo; y, una vez que se ha adquirido el concepto, el profesor puede solicitar a los estudiantes una manipulación más depurada sobre los tratamientos algebraicos**.

De hecho, esta posición no es exclusiva de la didáctica de las matemáticas, por ejemplo, el matemático Brodetsky (1919-1920) ya mencionaba la importancia de la representación gráfica en las ecuaciones diferenciales, ya que en ese entonces, y continúa siendo cierto, a una gran cantidad de ecuaciones diferenciales no se les había encontrado solución; precisamente, a través de visualizar el campo de tangentes es posible encontrar soluciones analizando el fenómeno físico desde una perspectiva del modelo matemático gráfico. Así, en ese contexto, Brodetsky en los años 1920's mencionaba **la importancia de realizar gráficas en papel milimétrico del campo de tangentes asociado a una ecuación dife-**

rencial; ¿Qué pasaría si en ese entonces los estudiantes hubieran tenido acceso a la tecnología?

Un modelo matemático puede ser una expresión algebraica, una representación gráfica u otro tipo de representación (p. e. tabla de valores).

La modelación matemática es importante en la mayoría de las aplicaciones de las matemáticas a las otras ciencias. Su utilidad ha sido demostrada constantemente con las aplicaciones de la matemática en la física, ingeniería, comercio y administración, por mencionar solamente algunas. La importancia del modelo no solamente puede servir para explicar el fenómeno con los datos con los que se cuentan en ese momento, sino también para predecir lo que podría suceder con el pasar de los años. Un ejemplo de esto, es el crecimiento poblacional en algún país. El modelo matemático podría explicar el crecimiento poblacional después de cierto número de años. En otros casos, no es necesario que un fenómeno se repita para que puede ser modelado. De hecho, tenemos fenómenos que no se repiten, y con la recolección de datos es posible analizar el fenómeno e intentar encontrar un modelo. Puesto que la modelación matemática tiene como objeto la búsqueda de un modelo matemático que nos permita explicar el fenómeno en términos de ese modelo, un primer acercamiento para introducir el proceso de modelación matemática podría ser el ejemplificado con el diagrama siguiente:

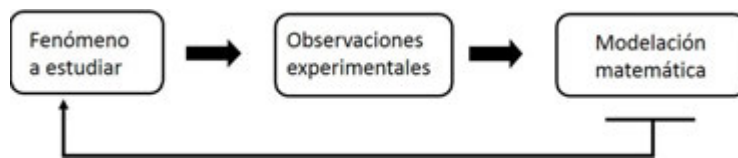


Figura 1. Proceso general de la modelación (1^{er} acercamiento).

La depuración del modelo se da al realizar un proceso cíclico que permita reajustar el modelo para mejor explicar el fenómeno en cuestión. Sin embargo, este acercamiento es general, y dentro de un contexto de enseñanza de las matemáticas se requiere de un modelo con mayor precisión. Veamos otro acercamiento propuesto por Katja (2005), quien nos proporciona un mejor acercamiento:

1. Definir un modelo real: simplificando, estructurando, idealizando la situación original,
2. Transformar el modelo real en un modelo matemático: por medio de la matematización,
3. Tratar matemáticamente el modelo,
4. Interpretar los resultados obtenidos a partir del modelo matemático,
5. Validar el modelo construido a la luz de soluciones obtenidas y de la matematización.

Si bien este modelo nos aporta un mejor acercamiento al problema del aprendizaje de las matemáticas, todavía no es lo suficientemente concreto para nuestros propósitos de enseñanza.

Antes de proporcionar un nuevo acercamiento, debemos colocarnos dentro de un marco teórico que nos proporcione los medios para reflexionar sobre nuestras propuestas didácticas.

Utilizaremos el marco teórico de Vergnaud (1991) en lo que se refiere al campo conceptual; para Vergnaud (Idem), un concepto planteado a través de situaciones y problemas, adquiere sentido para el sujeto. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto y las operaciones necesarias para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático. De hecho, recientemente Balacheff & Gaudin (2012; en prensa) han añadido otra componente, relacionada con la estructura de control; el conjunto de las componentes forman las concepciones. Este añadido es fundamental en la didáctica de las matemáticas ya que la construcción de conceptos pasa por la construcción de concepciones. Un aspecto de corte práctico es saber cuál es el campo conceptual para cada concepto que se quiere enseñar. De hecho, ¡allí radica el principal problema! Para cada concepto matemático, ¿qué tipo de problemas es importante seleccionar para que el aprendizaje sea efectivo? Los investigadores proporcionan buenos ejemplos de lo que puede incluirse en ese campo conceptual; pero, para la mayoría de los conceptos que deben ser tratados en el aula, el profesor no cuenta con suficientes actividades que le permitan desarrollar una enseñanza adecuada de las matemáticas. Ese es también uno de los factores que no han permitido el uso sistemático de la tecnología en el aula de matemáticas.

En este acercamiento, sobre el campo conceptual de Vergnaud (1991) y de Balacheff & Gaudin (20012; en prensa), es importante que realicemos la distinción entre ejercicio, problema y situación problema (ver Hitt, 2004). Esta distinción la haremos dentro un marco teórico general sobre las representaciones (ver Hitt, 2003).

Ejercicio: Si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un proceso o algoritmo a seguir para resolverlo, se dice que el enunciado es un ejercicio.

Problema: Si en la lectura del enunciado no recordamos un proceso o algoritmo directo a utilizar, y la situación nos obliga a producir representaciones que nos permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa, sino con las articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros involucrados, diremos que ese enunciado es un problema.

Situación problema: La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática a utilizar no debe ser explicitada en el enunciado. Es a causa de la interacción de los estudiantes con la situación que emergen representaciones funcionales (espontáneas), y por tanto la matemática hace acto de presencia de manera natural en la discusión entre los miembros de un equipo de estudiantes, proporcionándoles la posibilidad de construir un modelo matemático que, éste a su vez, permite explicar la situación.

Nuestra proposición es que las situaciones problema, en el contexto de una teoría sobre representaciones matemáticas, deben seguir entonces, un tratamiento en el aula como el que se muestra en la figura 2.

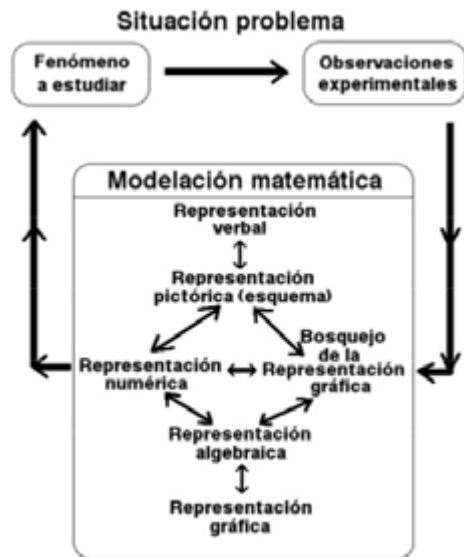


Figura 2. Proceso de modelación matemática (2º acercamiento).

2. En este tipo de acercamiento, ¿cómo organizar una secuencia didáctica que incluya el uso de calculadora?

Nuestra proposición es que la adquisición de conceptos debe realizarse en varias etapas y no solamente con un par de ejercicios. En realidad, estamos interesados en la producción de **secuencias de aprendizaje que impliquen la adquisición de conocimientos de forma que sea retenido por los estudiantes a largo plazo**.

Consideramos tres etapas en la construcción de conceptos. En el documento que nos ocupa, el interés radica en la promoción de conceptos como el de covariación, función y procesos de modelación en estudiantes de secundaria y futuros profesores de enseñanza secundaria. Veamos a continuación, en qué consisten cada etapa.

Primera etapa: Proposición de situaciones problema que generen el uso de diferentes tipos de funciones en el proceso de modelación matemática (el uso de materiales como la cuerda, compás, elásticos, etc., y calculadora son primordiales en esta etapa). Con la cuerda o compás, es posible construir una primera aproximación a la representación gráfica de la situación. Ello permite que los estudiantes desarrollen, primeramente, el concepto de covariación (ver Carlson, 2002). Al mismo tiempo, los estudiantes pueden ser capaces de proporcionar una predicción sobre el comportamiento aproximado de la función desde un

punto de vista gráfico (predicción construida a través de un proceso manual utilizando la cuerda o compás). Ello proporciona al estudiante **elementos de control** (en el sentido de Saboya et al., 2006) ya que en los procesos algebraicos largos, generalmente se cometen errores; y, al utilizar la calculadora, el estudiante se enfrenta a una representación producto de su proceso algebraico y a una representación gráfica producto de su “**proceso manual**” (utilizando la cuerda o compás); si no coinciden, el estudiante se encontrará frente a un conflicto cognitivo. Resolver este conflicto, permitirá al estudiante avanzar en sus procesos de aprendizaje (ver ejemplo del caminante más adelante en este documento).

Una vez trabajadas estas situaciones en clase, es posible pasar a la siguiente etapa. De hecho, la metodología que hemos seguido desde hace varios años **para las dos primeras etapas** es la metodología ACODESA (ver Hitt, 2007, Hitt et al., 2008, González-Martín et al., 2008). En un ambiente de aprendizaje colaborativo, debate científico y de auto reflexión, proporcionamos a los estudiantes un ambiente de aprendizaje desde el punto de vista de una teoría sociocultural.

Segunda etapa: Utilización de las funciones conocidas que son susceptibles de aplicar a diferentes tipos de situaciones.

En esta etapa, es importante generar datos y encontrar un modelo matemático (función) que permita explicar el fenómeno a partir del modelo matemático. En física, ingeniería, y economía entre otros, es uno de los procesos más utilizados. A partir de datos tomados de la vida real, debemos tratar de encontrar un modelo matemático que permita explicar el fenómeno, e incluso predecir lo que podría suceder en algún momento dado. Tomemos por ejemplo el crecimiento poblacional en un país. Encontrar un modelo matemático que nos explique el crecimiento durante los últimos 100 años puede ser importante; Pero si además, nuestro modelo predice sobre el probable crecimiento poblacional dentro de 10, 20, 50 o 100 años, es posible considerar esta información para la planificación sobre el crecimiento poblacional en ese país.

Tercera etapa: Procesos de institucionalización (análisis de parámetros de ciertas familias de funciones).

Esta etapa es la más conocida en nuestro medio. Los profesores utilizan las representaciones institucionales, analizando por ejemplo el papel de los parámetros para analizar el comportamiento de una familia de funciones. En esta etapa se supone que el estudiante debe llegar al saber, qué es considerado como lo que todo individuo debe saber al final de sus estudios en un ciclo dado, de una institución dada.

3. Metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión)

La metodología ACODESA¹ integra varias situaciones problema interrelacionadas unas con otras (Glaeser, 1999); toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (ver Hitt, González-Martín et Morasse, 2008 et González-Martín, Hitt et Morasse, 2008)

Veamos un resumen de las características de la metodología ACODESA (para una versión más completa, ver Hitt, 2007). Es importante señalar que en esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización.

1. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema),
2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales),
3. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales),
4. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).
5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

En las tres primeras fases el profesor es un guía y es deber de los estudiantes, argumentar y validar sus producciones, el proceso de institucionalización es la etapa en la cual el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales.



Figura 3. Materiales utilizados en la resolución de situaciones: Cuerda, compás, regla, calculadora...

1 Esta parte del texto es retomada del documento presentado en Barrera F. et al., (Editores), Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas. Pachuca, Hidalgo, México, 2008, pp. 41-55.

En la metodología ACODESA, la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante. En este caso, los estudiantes utilizan un compás para medir y trasladar medidas. En el caso de los estudiantes de secundaria, ello les permite convencer a sus compañeros, además la etapa de debate científico permite a algunos estudiantes modificar sus versiones originales llegando a resultados más refinados.

La metodología ACODESA ya ha sido probada en diferentes ambientes. Con respecto a experimentar sin uso de la calculadora, hemos realizado una serie de investigaciones tanto en México (bajo la dirección de Cortés) como en Québec (bajo la dirección de Hitt & González-Martín) con poblaciones en la escuela secundaria que nos muestran el potencial de la metodología. A continuación se muestran algunos resultados del grupo de México. Resultados del grupo de Québec se pueden ver en Hitt et al., (2008), González-Martín et al., (2008).

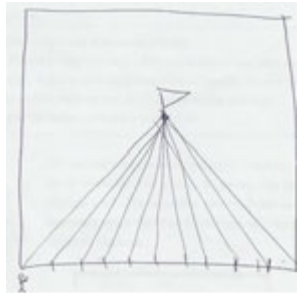


Figura 4. Pista producida por un equipo de estudiantes de secundaria en México.

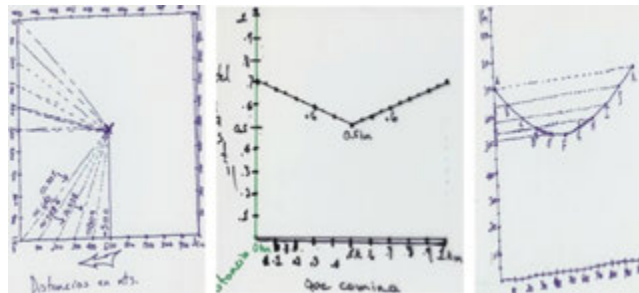


Figura 5. Soluciones gráficas proporcionadas por diferentes equipos de estudiantes de secundaria en México utilizando cuerda o compás.

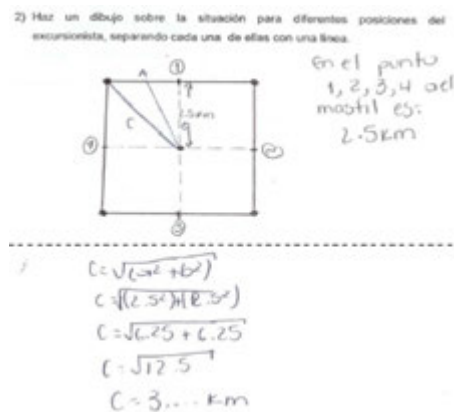


Figura 6. Lo escrito por debajo de la línea punteada fue realizado posterior al debate.

4. Ejemplos de actividades para cada una de las etapas

4.1 Actividad: El caminante² (primera etapa)

Un excursionista comienza un paseo alrededor de un parque (en forma de cuadrado). Sigue el camino que le permite por lo tanto regresar al punto de partida. Al seguir este camino, un gran mástil con una bandera se encuentra situado en el centro del parque. Traza un camino y coloca el puesto de socorro en el lugar de tu elección de acuerdo al enunciado.

Parte 1. Qué variables podemos identificar en esta situación?

Parte 2. Qué relación funcional podemos proponer para las variables seleccionadas?

Parte 3. Cómo podemos representarla?

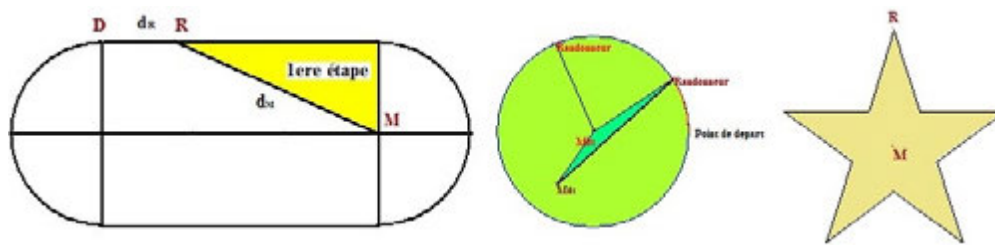


Figura 7. Propositiones, situación abierta del caminante.

Tomando en cuenta que las actividades tienen gran potencial para el desarrollo de procesos de modelación matemática. Como señalamos en el pie de página, la actividad del caminante se ha utilizado en la formación de profesores en Québec desde hace varios años. Le hemos dado un tinte tecnológico solicitando a los futuros profesores que utilicen la calcu-



Figura 8. En el caminante “versión libre”, los equipos proponen diferentes pistas y la complejidad matemática puede ser mayor o menor dependiendo de la pista propuesta.

² La actividad del caminante ha sido utilizada desde hace algunos años en la formación de profesores en Québec. Esta actividad fue utilizada constantemente dentro de un curso en la UQAM, por Claude Janvier y Bernadette Janvier.

ladora con posibilidades gráficas en el aula de matemáticas en la resolución de las actividades. Reflexiones adicionales sobre la actividad en cuestión muestran la complejidad de la actividad dependiendo de la pista producida para el caminante (pueden verse en los ejemplos de las Figuras 7 y 8).

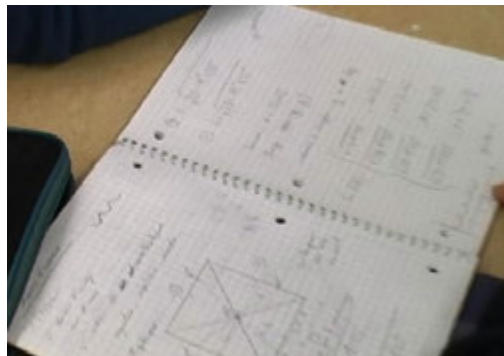


Figura 9. Resultados obtenidos por un equipo, con la pista cuadrada.

Veamos lo que sucedió en un grupo en la versión del caminante cuya pista es la de un cuadrado. Los futuros profesores (estudiantes de licenciatura), realizan un trabajo algebraico sin mucho problema. Sin embargo, a pesar de sus habilidades algebraicas, no es fácil imaginar la representación gráfica de una función por partes como se muestra en el cuaderno de uno de los miembros de un equipo (ver Figura 9 y 10). Sin embargo, ¿cómo saber si no se cometieron errores desde un punto de vista algebraico? Este es precisamente un caso en el que las expectativas de la representación gráfica de los diferentes estudiantes de un equipo no coincidían, aún y cuando desde un punto de vista algebraico ya habían resuelto el problema.

En el cuaderno de uno de los estudiantes que trabajaban en un grupo de 4 personas (dos mujeres y dos hombres) se pueden encontrar ideas intuitivas y formales. En la hoja de la izquierda parte superior, se encuentra una gráfica que es completamente diferente a la de

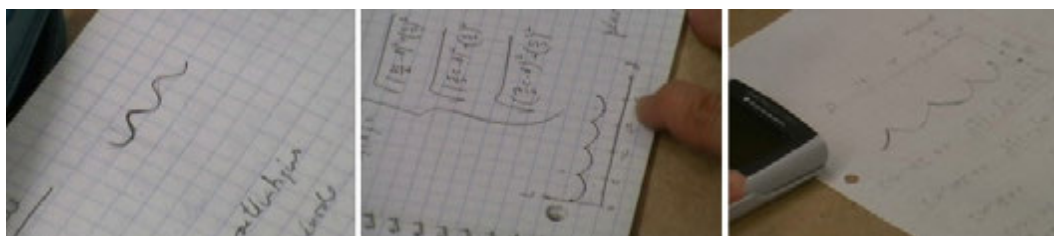
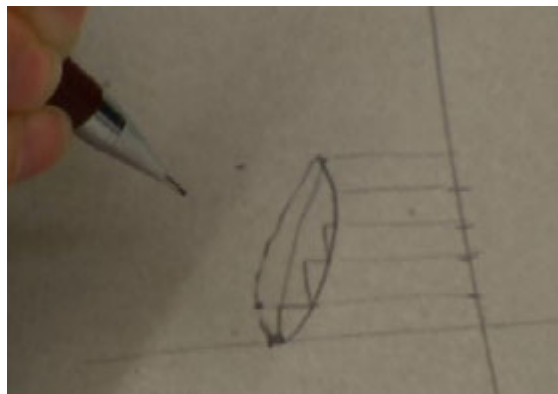


Figura 10. Una vez resuelto el problema desde un punto de vista algebraico, ¿Qué gráfica le corresponde?

Figura 11. La discusión comienza y los argumentos se multiplican...



abajo a la derecha; otra persona del grupo tenía una gráfica completamente diferente. Ello provocó una discusión interesante entre los 4 estudiantes.

Los argumentos de unos eran diferentes de los argumentos de otros, sin llegar a un acuerdo. Un momento interesante se dio cuando una de las estudiantes tomó su calculadora y trató de realizar la gráfica. Otro de los estudiantes al ver que tenía dificultades con la calculadora se la pidió y empezó él a manipularla, obteniendo lo mostrado en la Figura 12.

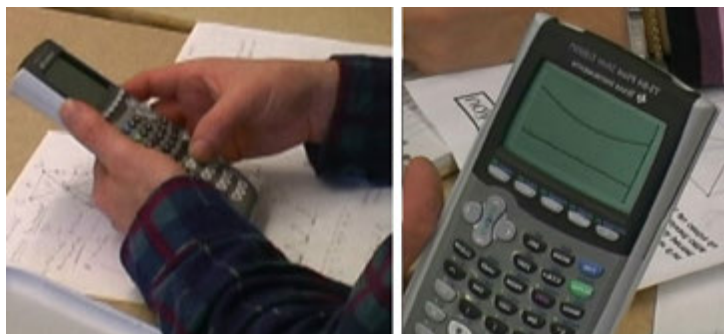
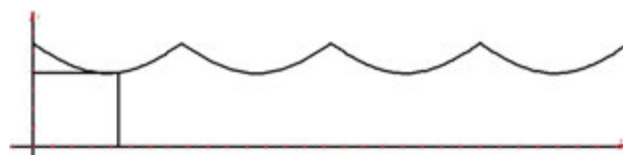


Figura 12. Representación gráfica proporcionada por la calculadora.

A partir de ese momento, la discusión se dio por terminada. Ya contaban con la representación gráfica correcta y dejó de interesarles el problema...

Considerando un cuadrado de lado unitario (p. e. 1 km), se puede obtener la función en términos de la distancia recorrida por el caminante (d): $D(d) = \sqrt{d^2 - d + \frac{1}{2}}$, cuya representación gráfica considerando el trayecto completo, es lo mostrado en la Figura 13.

Figura 13. Gráfica obtenida bajo una simulación con Cabri.



En el caso de los estudiantes universitarios, se solicita que realicen los cálculos para una situación más compleja en la situación en la que el asta se encuentre en otro lugar sobre una de las diagonales del cuadrado. Utilizando un software de Geometría dinámica como el Cabri, se obtiene una gráfica como la mostrada en la Figura 14.

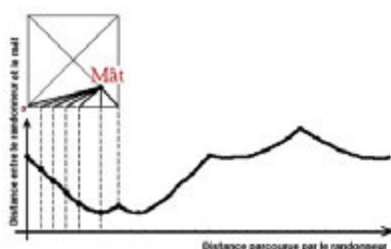


Figura 14. Pista cuadrada, puesto de socorro sobre una diagonal.

$$D(d) = \sqrt{\left(A - \frac{r}{\sqrt{2}} - d\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

5. A manera de conclusión

El diseño de actividades en ambientes tecnológicos no es una tarea fácil. Es importante tomar en cuenta que muchos de los problemas que se utilizaban en el pasado probablemente no tengan cabida en un ambiente con tecnología.

Los investigadores en didáctica de las matemáticas, tendrían que proporcionar muchos ejemplos para que el profesor de matemáticas tenga un soporte en la preparación de sus cursos. El uso de tecnología en el aula de matemáticas requiere, como Artigue (2002), Guin & Trouche (1999), Lagrange (2003), Hitt & Kieran (en prensa) entre otros lo han señalado, de cuidados en el diseño de actividades.

En el presente documento hemos querido mostrar características del uso de tecnología en el aula de matemáticas relativa a la construcción del concepto de covariación en el sentido de Carlson (2002), el concepto de función y procesos de modelación matemática. Nuestras propuestas didácticas intentan la promoción de un aprendizaje profundo de la matemática, que pueda ser recordado y que no se pierda a través del tiempo. Recordemos que lo que se aprende si no es utilizado se pierde con el tiempo (ver Karsenty, 2003).

La metodología utilizada en las experimentaciones tanto en México como en Québec ha sido ACODESA. La experimentación ha mostrado las dificultades que podemos encontrar en una enseñanza de corte sociocultural, pero también nos ha mostrado su potencialidad para seguirla utilizando en el aula de matemáticas. Los dos grupos de investigadores tanto en México como en Québec consideran fructífero el uso de la metodología. En una de las experimentaciones con dos grupos de secundaria en Québec, pudimos observar que con un grupo de 36 alumnos, realizar la experimentación fue muy pesado para el profesor de secundaria, y él tuvo que modificar el trabajo en equipo para poder controlar al grupo. En cambio, con otro grupo de 24 alumnos, el mismo profesor, utilizando la metodología tuvo resultados extraordinarios (ver Hitt et al., 2008; González-Martín, 2008).

Si bien ya hemos realizado cierto tipo de experimentación con tecnología (calculadoras) con estudiantes universitarios que serán futuros profesores, nuestra siguiente etapa es la de realizar experimentación en el aula de matemáticas en la escuela secundaria y preuniversitaria con el uso de calculadora con posibilidades gráficas.

Bibliografía

- Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam, Germany. (Download: <http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/elt/gdm/2000>)
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.
- Balacheff N. & Gaudin N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, No. 65, (Download: <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>)
- Balacheff N. & Gaudin N. (en prensa). Modeling students' conceptions (the case of functions). In Hitt F., Holton D. & Thompson P. (Eds), *Research in collegiate in mathematics education*, Volume VII. USA.
- Brodetsky S. (1919-20). The Graphical Treatment of Differential Equations. *The Mathematical Gazette*, IX, (142, p. 377-382, p. 3-8, p. 35-38, 919); X, (146, p. 49-59, 1920).

- Carlson, Marilyn P. (2002). Physical enactment : a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In Hitt F., (ed.), *Representations and mathematics visualization*. (pp. 63-77). Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN.
- Confrey, J., Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. En Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., Niss, M. (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education*. Springer. USA.
- Katja, M. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching Mathematics and its applications*. Volume 24, No. 2-3, pp. 61-74.
- Glaeser G. (1999). Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques. *La Pensée Sauvage Éditions*. France.
- González A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. A case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, and the XX North American Chapter Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.
- Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 255-271.
- Hitt F. (2004). Une comparaison entre deux approches, enseignement des mathématiques sans ou avec logiciels et calculatrices symboliques. In Guiménez J., Fitz Simons G. and Hahn Corine (2004) *Actes de la CIEAEM-54*, Vilanova i la Geltrú. Spain, pp. 351-359.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. Paris : Éditorial Hermes.
- Hitt F. (2008). La didáctica de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas. en Barrera F. et al., (Editores), *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*. Pachuca, Hidalgo, México, 2008, pp. 41-55.
- Hitt F., González A. & Morasse C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of co-variation as a prelude to the concept of function. In 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Topic Study Group 20 (TSG 20), Visualization in

- the Teaching and Learning of Mathematics, July 6-13, 2008, Monterrey, N. L., Mexico. <http://tsg.icme11.org/tsg/show/21>.
- Hitt F. & Morasse C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: Constructing the concept of covariation as a prelude of the concept of function. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), pp-pp. 2009 (nº17). ISSN: 1696-2095
- Hitt F. & Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées, *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM-59), Dobogókő (Hungary), 117-123.
- Karsenty R. (2003). What do adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions, *Educational Studies in Mathematics*, 51, 117-144.
- Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 1-30.
- Hitt F. & Kieran C. (en prensa). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers in Mathematical Learning*.
- Lagrange, J.-B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in school mathematics* (pp. 269-284). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Saboya M., Bednarz N. & Hitt F. (2006). Le contrôle sur l'activité mathématique comme constitutif de la rationalité en maths: élaboration d'un cadre de référence. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone*. Sherbrooke, Québec, 2006.
- Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2014.

Fecha de Aprobación: 29 de septiembre de 2014.