62 Ciencia Nicolaita

# Derivación alternativa de la ecuación general de volumen seccional para las geometrías clásicas de tronco de árbol

***Gildardo Cruz de León y Margarita Bañuelos Jiménez***

Facultad de Ingeniería en Tecnología de la Madera. UMSNH (gcruzl@umich.mx).

## Resumen

El presente trabajo se refiere a la teoría clásica de la forma y estimación de volumen de troncos de árbol y segmentos de los mismos. Se deriva, de una manera alternativa a la que se encuentra en literatura reciente, la ecuación general de volumen seccional para truncados de sólidos de revolución que se utilizan en el modelo clásico de un tronco de árbol. Las ecuaciones de volumen conocidas para los truncados de las geometrías consideradas en dicho modelo, paraboloide, cono y neiloide, son sólo casos particulares de la ecuación general. La derivación alternativa que aquí se presenta, resulta de generalizar el procedimiento algebraico conocido en la literatura tradicional para derivar las ecuaciones de volumen de los truncados referidos.

***Palabras clave***: mediciones forestales, dendrometría.

## Abstract

***Alternative derivation of the general sectional volume equation for the classical geometries of tree stem***

The present work refers to the classical theory of form and volume estimation of tree stems and segments of them. It is derived, in an alternative way to the one found in recent literature, the general volume sectional equation for frustums of solids of revolution used in the tree stem classical model. The known frustum volume equations for the regarded geometries in such model, paraboloid, cone and neiloid, are only particular cases of the general equation. The alternative derivation, shown here, results from the generalization of the algebraic procedure to derive the volume equations of those frustums, known in the traditional literature.

*Key words*: forest measurements, dendrometry.

# Introducción

La estimación del volumen de troncos de árbol es una de las tareas primarias en las áreas forestal y de ciencia y tecnología de la madera. Por ejemplo, se requiere para la realización de inventarios forestales y estudios de crecimiento, tanto en plantaciones como en áreas de bosque natural, ya sea para aprovechamiento de madera o para investigación (West 2004). Existe una amplia variedad de métodos utilizados para la estimación del volumen en cuestión. Entre ellos, serán de interés para el presente trabajo, los métodos seccionales y los métodos con base en funciones de perfil o ahusamiento, que se discuten a continuación.

En los métodos seccionales, el volumen de una sección longitudinal o segmento de tronco de longitud determinada, se aproxima como el de un cilindro con la misma longitud y un área media de sección transversal definida que distingue a cada método (Avery y Burhart 2002). Incluso, existen métodos seccionales exclusivos para estimar el volumen de las trozas que se obtienen de la parte más baja de un tronco de árbol, debido a que contienen la madera de mayor calidad y costo (Bruce 1982, Patterson y Doruska 2004).

Por su parte, en los métodos con base en funciones de perfil, se determina una función del perfil completo del tronco y con ella se genera un sólido de revolución que modela su geometría. Mediante la determinación del volumen del sólido se estima el volumen del tronco (West 2004).

La determinación de la forma de un tronco de árbol representa por sí mismo un problema complejo (Brack 1999). Existen en la literatura dos maneras de hacerlo: una de ellas es a través de bases científicas, principalmente hipótesis mecánicas (Larson 1963, McMahon 1973, Dean y Long 1986) y la otra de manera empírica a través de funciones de perfil. En el primer caso, los estudios son fundamentales pero escasos. Las teorías existentes predicen geometrías elementales que no representan la forma de un tronco real. El método convencional utilizado actualmente para modelar la forma completa de un tronco de árbol es mediante funciones de perfil. Se determina una función de perfil que proporcione una aproximación al diámetro de la sección transversal circular del tronco como función de la altura. Aún cuando son muy precisas, las funciones de perfil se determinan de manera empírica, y por especie de árbol, a través de funciones que se ajustan estadísticamente a datos experimentales. Algunas de estas funciones son muy complejas en su forma y requieren de métodos numéricos para determinar el volumen del sólido de revolución respectivo (West 2004, Van Laar y Akça 2007).

Las funciones de perfil que predominaron en el campo de las mediciones forestales hasta hace aproximadamente tres décadas corresponden a geometrías simples. Con dichas funciones se generan los sólidos de revolución: cilindro, paraboloide, cono y neiloide. A las geometrías anteriores, se les referirá aquí como geometrías clásicas o tipos dendrométricos clásicos, de acuerdo con Diéguez-Aranda et al. (2003).

Unificando la información contenida en la literatura tradicional, se puede concluir que la geometría de la mayoría de los segmentos o trozas de un tronco de árbol está alrededor de un truncado de cono y entre los truncados de paraboloide y neiloide (Graves 1906, Belyea 1931, Chapman y Meyer 1949). Por lo tanto, estas son las tres geometrías más importantes para modelar la forma de un tronco de árbol por secciones desde un punto de vista clásico. En general, la parte baja del tronco se considera de forma aproximada a un truncado de neiloide, la parte intermedia a un truncado de paraboloide y el último segmento que contiene a la punta se aproxima a un cono o a un paraboloide (Husch et al. 1982, Avery y Burkhart 2002, Van Laar y Akça 2007).

El modelo clásico de un tronco de árbol dejó de ser predominante por los motivos siguientes: i) se observan variaciones en la forma de troncos de árbol entre diferentes especies por lo que no conviene utilizar un modelo general; ii) no es práctico el tener que utilizar diferentes geometrías para las diferentes secciones de un mismo tronco ya que no es posible determinar con precisión en donde termina una y comienza la otra (West 2004). Estos inconvenientes, se resuelven determinando una función de perfil para el tronco completo, y por especie, de acuerdo con lo que se realiza actualmente. A pesar de lo anterior, la teoría clásica ha permanecido por más de un siglo como una referencia imprescindible tanto en enseñanza como en investigación (Graves 1906, Cruz de León y Uranga-Valencia 2013).

Otro problema fundamental en las mediciones forestales es la determinación del volumen de trozas de un tronco de árbol, ya que los troncos se seccionan en trozas para facilitar su manejo y posterior procesamiento para la obtención de madera comercial. En principio, una vez que se tiene la forma del tronco de árbol, mediante métodos matemáticos, se puede determinar el volumen del tronco total o de un segmento del mismo. Sin embargo, para determinar el volumen de una troza, se debe conocer exactamente a qué segmento del tronco completo original corresponde. Es decir, conocer la posición que ocupaban en el tronco original los extremos del segmento que corresponde a la troza, lo que no es posible porque no se registra dicha información, y al final se caracterizan individualmente. Por esta razón, en la práctica, es imperativo determinar el volumen de las trozas con base en su longitud y las áreas de las secciones transversales de sus extremos o de su parte media. Matemáticamente, lo anterior significa pasar de variables de posición a variables de áreas de secciones transversales, lo cual, se logra mediante procedimientos algebraicos.

Como en la teoría clásica la forma de un tronco de árbol se modela utilizando los sólidos de revolución, paraboloide, cono y neiloide, los segmentos o trozas corresponden a truncados de dichos sólidos. Por esta razón, es importante conocer el volumen de los mismos. Desde hace más de un siglo se tiene conocimiento de las fórmulas para obtener dichos volúmenes (Graves 1906). Hasta donde se sabe, no se había observado una relación o vínculo entre ellas. Cruz de León (2010) derivó una ecuación general de volumen seccional, de la cual, las fórmulas de volumen seccional para las geometrías en cuestión, se obtienen directamente como casos particulares. Aún cuando la ecuación general referida es de interés para el área forestal y de ciencia y tecnología de la madera, su derivación fue realizada de manera breve y directa desde un punto de vista esencialmente matemático sin relación con procedimientos matemáticos familiares sobre el tema en dichas áreas.

Para tratar de vincular a la ecuación general de volumen seccional con procedimientos matemáticos conocidos en la literatura de las áreas mencionadas, en el presente trabajo, se supuso que la ecuación generalizada obtenida por Cruz de León (2010), también debería obtenerse si fuera posible generalizar el procedimiento algebraico mediante el cual se obtienen las fórmulas de volumen para paraboloide, cono y neiloide en dicha literatura. La suposición anterior representó la conjetura a probar en el presente trabajo. Los resultados muestran que fue posible llevar a cabo dicha generalización y se derivó, de esta forma alternativa, la ecuación general de volumen seccional.

# Metodología

En el presente trabajo, se utilizaron métodos y modelos de la teoría clásica de estimación de forma y volumen en mediciones forestales. De igual manera se hizo uso de cálculo y métodos algebraicos elementales en la obtención de resultados. El material señalado se describe a continuación.

## Geometrías clásicas de tronco de árbol o tipos dendrométricos clásicos

La forma de un tronco de árbol puede modelarse, por secciones, mediante geometrías de sólidos de revolución elementales. La función generatriz, *y*, de dichos sólidos, como función de la altura, *x*, se define a través de la ecuación

$$y^2 = p_n x^n \qquad [1]$$

en donde $p_n$ es una constante positiva, y *n* es una potencia denominada el exponente de forma (Graves 1906). Al rotar la función *y*, 360° alrededor del eje *x*, en un sistema de coordenadas *xyz*, considerando el volumen que encierra la superficie respectiva, se genera un sólido de revolución para cada valor de *n*. Las geometrías comúnmente consideradas en la literatura tradicional se refieren a *n = 0, 1, 2,* y *3,* que corresponden a cilindro, paraboloide, cono y neiloide, respectivamente, a las que se denominará geometrías clásicas o tipos dendrométricos clásicos (Diéguez-Aranda et al. 2003).

De acuerdo a lo descrito en el párrafo previo, un sólido de revolución para $n$ entero positivo, se sitúa en un sistema de coordenadas $xyz$ con su punta en el origen y con su eje de simetría a lo largo del eje $x$ positivo. De esta forma, la variable $x$ corresponde a la altura y se mide a partir de la punta. El área de la sección transversal se incrementa al aumentar la altura. Por lo tanto, el volumen total para cada una de estas geometrías, considerando que su altura total es $H$, y que se denotará aquí como $V_{T,n}$, está dado por la ecuación

$$V_{T,n} = \int_0^H \pi y^2 dx = \int_0^H \pi p_n x^n dx = \frac{\pi p_n}{n+1} H^{n+1} \quad [2]$$

## Métodos de volumen seccional

Por simplicidad, a secciones longitudinales de tronco de árbol o en su caso, a trozas del mismo, se les denominará indistintamente como segmentos de tronco. Cualquier método seccional para estimar el volumen de un segmento de tronco, de longitud $L$, se refiere al volumen de un cilindro y puede escribirse como

$$V = \bar{S}L \quad [3]$$

en donde $\bar{S}$ es una área de sección transversal promedio (Avery y Burkhart 2002). Lo que define a un método seccional particular, es la forma de $\bar{S}$ como función de áreas de secciones transversales determinadas del segmento. Estos métodos seccionales corresponden a casos particulares de métodos aproximados del cálculo para estimar el volumen de sólidos de revolución (Stewart 2002, Cruz de León y Uranga-Valencia 2013)

## Ecuaciones de volumen seccional para truncados de los tipos dendrométricos clásicos

Considérese un segmento o truncado de los tipos dendrométricos clásicos de longitud $L$, que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$, con $x_1 < x_2$ y $L = x_2 - x_1$. Los volúmenes exactos $V_n$, para tales truncados, están dados por la ecuación

$$V_n = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx = \frac{\pi p_n}{n+1}\left(x_2^{n+1} - x_1^{n+1}\right) \quad [4]$$

Considérese también que $s$ y $S$ son las áreas de las secciones transversales para los extremos situados en $x = x_1$ y $x = x_2$, respectivamente. Después de hacer el cambio de variables de $x_1$ y $x_2$ a $s$ y $S$, y de realizar trabajo algebraico en la ecuación [4] para $n=0, 1, 2$ y $3$, resultan los siguientes volúmenes de segmento o truncado para los tipos dendrométricos clásicos

$$V_0 = (S)L = (s)L = \bar{S}_0 L \quad [5]$$

$$V_1 = \left(\frac{S+s}{2}\right)L = \bar{S}_1 L \quad [6]$$

$$V_2 = \left( \frac{S + \sqrt{Ss} + s}{3} \right) L = \bar{S}_2 L \qquad [7]$$

y

$$V_3 = \left( \frac{S + \sqrt[3]{S^2 s} + \sqrt[3]{Ss^2} + s}{4} \right) L = \bar{S}_3 L \qquad [8]$$

(Romhan de la Vega et al. 1994). Como las mismas ecuaciones [5-8] lo indican, se trata de ecuaciones de volumen seccional en donde el área media de sección transversal, para cilindro, paraboloide, cono y neiloide, denotadas como $\bar{S}_0$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ y $\bar{S}_3$, están definidas por las expresiones entre paréntesis, respectivamente. En particular, para cilindro $s = S = \bar{S}_0$. Aquí, cabe señalar nuevamente que, de acuerdo a la literatura, las geometrías de interés para el modelo clásico de un tronco de árbol corresponden a *n=1, 2,* y *3*.

## Ecuación general de volumen seccional

La ecuación general de volumen seccional correspondiente a cualquier sólido de revolución obtenido mediante la función generatriz de los tipos dendrométricos clásicos, para *n* entero positivo, derivada por Cruz de León (2010), está dada por

$$V_n = \left( \frac{\sum_{i=0}^{n} \sqrt[n]{S^{n-i} s^i}}{n+1} \right) L \qquad [9]$$

Esta ecuación fue derivada directamente de la ecuación [4] utilizando una expresión algebraica conocida en la literatura matemática para la diferencia de dos términos elevados a la misma potencia entera positiva y realizando el cambio de variables de posición al de áreas de las secciones transversales en los extremos de los truncados. Puede verificarse que para *n=1, 2 y 3,* a partir de la ecuación [9], se recuperan fácilmente las ecuaciones seccionales [6-8] correspondientes a los volúmenes de truncados, de longitud *L,* de paraboloide, cono y neiloide, respectivamente. Esta es la ecuación que se ha propuesto derivar en este trabajo mediante un procedimiento matemático alternativo que corresponde a la generalización del procedimiento algebraico que condujo a las ecuaciones [6-8], según se describe enseguida.

# Resultados

## Derivación alternativa de la ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos

Si un truncado de sólido de revolución, de longitud $L$, y áreas de sección transversal $s$ en $x = x_1$ y $S$ en $x = x_2$, se genera mediante la ecuación $y^2 = p_n x^n$, entonces

$$s = \pi y_1^2 = \pi p_n x_1^n \qquad [10]$$

y

$$S = \pi y_2^2 = \pi p_n x_2^n \qquad [11]$$

o bién,

$$\pi p_n = \frac{s}{x_1^n} = \frac{S}{x_2^n} \qquad [12]$$

Inversamente,

$$\frac{x_1^n}{s} = \frac{x_2^n}{S} \qquad [13]$$

Si la función generatriz para un sólido de revolución está definida mediante la ecuación $y^2 = p_n x^n$, entonces el volumen de un truncado de dicho sólido que va de $x = x_1$ a $x = x_2$, con $x_1 < x_2$, está dado por la ecuación [4], que, por comodidad, se reproduce nuevamente aquí

$$V_n = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx = \frac{\pi p_n}{n+1}\left(x_2^{n+1} - x_1^{n+1}\right) \qquad [4]$$

Usando las ecuaciones [10] y [11], la ecuación [4] puede escribirse en la forma

$$V_n = \frac{(Sx_2 - sx_1)}{n+1} \qquad [14]$$

Despejando $x_1$ y $x_2$ de la relación $L = x_2 - x_1$ y sustituyéndolas en la ecuación [14], se tiene que

$$V_n = \frac{S(x_1 + L) - s(x_2 - L)}{n+1} = \frac{(S+s)L + (Sx_1 - sx_2)}{n+1} \qquad [15]$$

Por otro lado, despejando $x_1$ de la ecuación [13], $Sx_1$ puede escribirse como

$$Sx_1 = S\frac{s^{1/n}x_2}{S^{1/n}} = S^{(n-1)/n}s^{1/n}x_2 \qquad [16]$$

Utilizando el hecho de que $x_2 = x_1 + L$, la ecuación [16] también puede expresarse como

$$Sx_1 = S^{(n-1)/n} s^{1/n}(x_1 + L) = S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-1)/n} s^{1/n} x_1 \qquad [17]$$

Repitiendo el procedimiento anterior en el segundo término a la derecha de la ecuación [17], se obtiene

$$\begin{aligned} Sx_1 &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-1)/n} s^{1/n} \frac{s^{1/n} x_2}{S^{1/n}} = S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} x_2 \\ &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n}(x_1 + L) \\ &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} x_1 \end{aligned} \qquad [18]$$

Aplicando el mismo procedimiento (*n-1*) veces, para un entero positivo *n,* resulta

$$\begin{aligned} Sx_1 &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} L + \cdots + S^{(n-(n-1))/n} s^{(n-1)/n} L + S^{(n-(n-1))/n} s^{(n-1)/n} x_1 \\ &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} L + \cdots + S^{1/n} s^{(n-1)/n} L + S^{1/n} s^{(n-1)/n} x_1 \end{aligned} \qquad [19]$$

Similarmente, despejando $x_2$ de la ecuación [13] y sustituyéndola en el término $sx_2$, se tiene que

$$sx_2 = s\frac{S^{1/n} x_1}{s^{1/n}} = s^{(n-1)/n} S^{1/n} x_1 = S^{1/n} s^{(n-1)/n} x_1 \qquad [20]$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (Sx_1 - sx_2) &= S^{(n-1)/n} s^{1/n} L + S^{(n-2)/n} s^{2/n} L + \cdots + S^{1/n} s^{(n-1)/n} L \\ &= \left(S^{(n-1)/n} s^{1/n} + S^{(n-2)/n} s^{2/n} + \cdots + S^{1/n} s^{(n-1)/n}\right) L \end{aligned} \qquad [21]$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación [21] en la ecuación [15], se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{(S+s)L + (S^{(n-1)/n} s^{1/n} + S^{(n-2)/n} s^{2/n} + \cdots + S^{1/n} s^{(n-1)/n})L}{n+1} \\ &= \left(\frac{S + S^{(n-1)/n} s^{1/n} + S^{(n-2)/n} s^{2/n} + \cdots + S^{1/n} s^{(n-1)/n} + s}{n+1}\right) L \\ &= \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} S^{(n-i)/n} s^{i/n}}{n+1}\right) L \\ &= \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} \sqrt[n]{S^{n-i} s^{i}}}{n+1}\right) L \end{aligned} \qquad [22]$$

que es exactamente la ecuación general de volumen seccional para los tipos dendrométricos clásicos, denotada previamente como ecuación [9].

## Conclusiones

Se ha demostrado la conjetura que se propuso al inicio de este trabajo. Fue posible la generalización del procedimiento algebraico que se utiliza en las áreas de mediciones forestales y de ciencia y tecnología de la madera para determinar el volumen de los truncados de paraboloide, cono y neiloide. Como consecuencia de ello se obtuvo, de una forma alternativa, la ecuación general de volumen seccional. Aún cuando esta derivación alternativa es algebraicamente más laboriosa que la derivación original de Cruz de León (2010), no lo es mucho más que el procedimiento utilizado en la literatura tradicional para derivar las ecuaciones [6-8], correspondientes a truncados de las figuras mencionadas. De esta forma, el material que aporta el presente trabajo puede conectarse directamente con los conocimientos convencionales sobre el tema y ampliar el alcance de los mismos.

### Agradecimientos

El presente trabajo fue desarrollado como parte de un proyecto de investigación apoyado por la Coordinación de la Investigación Científica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

## Referencias

Avery, T.E. y H.E. Burkhart. 2002. Forest Measurements. Mc Graw Hill. USA. 456 pp.

Belyea, H.C. 1931. Forest measurement. New York, USA. John Wiley. 319 pp.

Brack, C. 1999. Forest Measurement and Modeling [online]. Available from sres-associated.anu.edu.au/ mensuration/volume.htm.

Bruce, D. 1982. Butt Log Volume Estimators. Forest Science 28(3): 489-503.

Chapman, H.H. y W.H. Meyer. 1949. Forest Mensuration. McGraw-Hill. USA.

Edition. USA. 522 pp.

Cruz de León, G. 2010. A general sectional volume equation for classical geometries of tree stem. Madera y Bosques 16(2): 89-94.

Cruz de León, G. y L.P. Uranga-Valencia. 2013. Theoretical evaluation of Huber and Smalian methods applied to tree stem classical geometries. BOSQUE 34(3): 311-317.

Dean, T.J. y J.N. Long. 1986. Validity of Constant-stress and Elastic-instability Principles of Stem Formation in *Pinus contorta* and *Trifolium pratense*. Annals of Botany 58: 833-840.

Diéguez-Aranda, U., M. Barrio-Anta, F. Castedo-Dorado, A.D. Ruíz-González, M.F. Álvarez-Taboada, J.G. Álvarez-González, y A. Rojo-Albareca. 2003. Dendrometría. Mundi-Prensa. Madrid, España. 327 pp.

Graves, H.S. 1906. Forest Mensuration. John Wiley & Sons. USA. 458 pp.

Husch, B., Chl. Miller y T.W. Beers. 1982. Forest Mensuration. New York, USA. John Wiley and Sons. 402 pp.

Larson, P.R. 1963. Stem Form Development of Forest Trees. For. Sci. Mon. 5.

McMahon, T. 1973. Size and Shape in Biology. Science 179: 1201-1204.

Patterson, D.W. y P.F. Doruska. 2004. A new and improved modification to Smalian's equation for butt logs. Forest Products Journal 54: 69-72.

Romahn de la Vega, C.F., H. Ramírez-Maldonado y J.L. Treviño-García. 1994. Dendrometría. Universidad Autónoma Chapingo. México. 354 pp.

Stewart, J. 2002. Cálculo Trascendentes Tempranas. Thompson Learning. México. 1151 pp.

Van Laar, A. y A. Akça. 2007. Forest Mensuration. Springer. Netherlands. 383 pp.

West, P.W. 2004. Tree and Forest Measurement. Springer-Verlag. Berlín. 167 pp.

Fecha de recepción: 10 de marzo de 2014.

Fecha de Aprobación: 12 de agosto de 2014.