79 Ciencia Nicolaita

La dimensión fractal del viento

Erasmo Cadenas Calderón y Luis Béjar Gómez

Facultad de Ingeniería Mecánica, UMSNH

Resumen

El presente trabajo tiene como finalidad generar inquietud en los lectores respecto del uso de la geometría fractal. Lo anterior se plantea, exponiendo algunos términos básicos del tema, como fractal, dimensión fractal, topología, auto-similar etc., para posteriormente utilizar dichos conceptos en el cálculo de la dimensión fractal de una serie de tiempo de la velocidad del viento. Para el cálculo de la dimensión fractal, se utilizó la técnica denominada Conteo de Cajas (Box Counting). Los resultados obtenidos arrojan que la serie de tiempo de la velocidad del viento es un fractal cuya dimensión fractal es de 1.92, un número fraccionario entre 1 y 2. Siendo el número 2 la representación de la dimensión Euclidiana de la serie de tiempo de viento analizada.

Palabras Clave: Dimensión fractal, Dimensión topológica, Viento.

Abstract

The purpose of this work is to generate interest in the readers on the use of fractal geometry. This is proposed by presenting some basic concepts of the topic, such as fractal, fractal dimension, topology, self-similarity, etc., to subsequently use these concepts in the calculation of the fractal dimension of a time series of wind speed. For the calculation of the fractal dimension, the Box Counting technique was used. The results obtained show that the wind speed time series is a fractal with a fractal dimension of 1.92, a fractional number between 1 and 2. Being the number 2 the representing of the Euclidean dimension of the analyzed wind time series.

***Keywords*:** Fractal dimension, Topological dimension, Wind.

Introducción

Existen en la naturaleza una gran variedad de fenómenos y objetos que pueden ser representados por un conjunto fractal, las nubes, las montañas, los copos de nieve, las costas, las fronteras, el sistema circulatorio del cuerpo humano, las neuronas del cerebro, etc., sin embargo, esta representación es aproximada, ya que la capacidad del ser humano y la capacidad de cómputo en la actualidad no conocen el detalle infinito.

Un fractal es una forma semigeométrica que puede ser plana o espacial, formada por componentes infinitos, en la cual se repite el mismo patrón a diferentes escalas.

El matemático Benoit Mandelbrot fue el que concibió el término fractal, el cual describe con sus propias palabras: "*acuñé el término fractal a partir del adjetivo latino* ***fractus****. El verbo correspondiente es* ***frangere*** *que significa <<romper en pedazos>>. Es pues razonable, ¡y nos viene de perlas!, que además es <<fragmentado>> (como en fracción)* ***fractus*** *signifique también <<irregular>>, confluyendo ambos significados en el término fragmentado*", Mandelbrot (2009).

La definición matemática, también establecida por B. Mandelbrot, es la siguiente: "un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff, es estrictamente mayor que su dimensión Topológica".

Aunque B. Mandelbrot estableció y definió el término fractal, algunos matemáticos como Georg Cantor, Jean Perrin y Giuseppe Peano, trabajaron con conjuntos de este tipo (fractales), incluso algunos fractales famosos llevan sus nombres, como el conjunto de Cantor o la curva de Peano.

En la actualidad existe un cambio de actitud en las diferentes ciencias, además de las matemáticas, respecto del estudio de los objetos fractales y su geometría, lo anterior se debe a que los investigadores y estudiosos de los fractales ven en éste enfoque una matemática distinta, más moderna y relacionada con la naturaleza.

Los objetos y la geometría fractal se han aplicado en diversas ciencias como: comunicaciones, medicina, economía, informática, robótica, música, física, química y geología, entre otras.

El objetivo del presente trabajo es generar inquietud en los lectores de todos los niveles respecto de la dimensión fractal, para lo cual se inicia haciendo referencia a los términos básicos del tema, como la definición de fractal y auto-similitud.

Posteriormente se describen los diferentes conceptos de dimensiones útiles para establecer la fractalidad de un objeto.

Finalmente se realiza el cálculo de la dimensión fractal de una figura denominada serie de tiempo horaria (las mediciones de la variable se realizaron cada hora). La dimensión fractal de la serie proporciona un elemento adicional que ayuda en el modelado y predicción del comportamiento de la misma. Es importante mencionar que cada serie de tiempo cuenta con un valor único de su dimensión fractal.

Las series de tiempo son valores que toma una variable en diferentes momentos del tiempo. El estudio y análisis de estas series en el área de la energía eólica, se enfoca en la generación de modelos para pronosticar la velocidad del viento, con la finalidad de planear la producción y el despacho de esta energía a la red eléctrica.

Aunque la energía eólica es un recurso abundante y renovable, su principal inconveniente es la intermitencia (Ren et al. 2017), la cual hace necesario establecer alternativas de reserva de energía en las plantas generadoras de electricidad.

Una de las formas de enfrentar el problema ha sido la generación de modelos de series de tiempo, que predicen el comportamiento del viento. Las técnicas usadas para este fin son estadísticas, numéricas y de inteligencia artificial (Singh et al. (2019), Prósper et al. (2019), Hong et al. (2019)).

Las técnicas anteriores detectan diferentes patrones en las series de tiempo, estos pueden ser: cíclicos, con tendencia, estacionales, aleatorios o cualquier otro patrón que ayude a modelar estas series, como un patrón fractal.

Harrouni (2016) calculó la dimensión fractal de una serie de tiempo de la velocidad del viento, conformada por promedios diarios. El objetivo de su trabajo era conocer la persistencia del viento, es decir, midió la correlación que existe entre valores adyacentes de la serie. Lo anterior podría permitir a los despachadores de energía tener una estimación de la cantidad de energía eólica generada cada día, por una central de este tipo. Petković et al. (2017), utilizan Redes Neuronales Artificiales para modelar las fluctuaciones de una serie de tiempo de viento, con características fractales, utilizando las dimensiones fractales de los obstáculos que el viento encuentra en el terreno que circula. Un procedimiento similar utiliza Nikolić et al. (2017), generando modelos con la técnica de Inteligencia Artificial denominada

Neuro-Fuzzy. Yan et al. (2020), analizan una serie de tiempo de la velocidad del viento medida cada 10 minutos, utilizando la técnica del Conteo de Cajas, el objetivo del trabajo es comprender el fenómeno denominado persistencia del viento y su utilidad en el pronóstico de la velocidad del mismo. La dimensión fractal calculada para la serie de tiempo es de 1.32.

Para el caso que nos ocupa, se calculó la dimensión fractal de una serie de tiempo horaria de la velocidad del viento, utilizando la técnica del Conteo de Cajas, medida en La Venta, Oaxaca, México. El valor obtenido fue de 1.92 (adimensional), lo anterior indica que es una serie anti-persistente, estas series se caracterizan por tener alta volatilidad y reversión a la media. La información anterior deberá ser tomada en cuenta para generar modelos de pronóstico de la misma, con la finalidad de elegir la técnica que pueda reproducir de mejor manera sus características.

1. Conceptos necesarios para representar un Fractal

A comienzos del siglo XX, uno de los problemas más importantes de las matemáticas fue determinar qué era la dimensión y cuáles eran sus propiedades. Los matemáticos han descubierto por lo menos diez distintas nociones de dimensión: la dimensión topológica, la dimensión de Hausdorff, la dimensión fractal, la dimensión de auto-semejanza, la dimensión de recuento de cajas, la dimensión de capacidad, la dimensión de información, la dimensión euclidiana, etc. Todas están relacionadas entre sí. Algunas de ellas pueden ser usadas en determinadas situaciones y no en otras, en las cuales son más ventajosas otras definiciones. Algunas veces todas tienen sentido y coinciden; otras veces, algunas tienen sentido pero no coinciden, Falconer (1990).

1.1. Dimensión

El diccionario de la Real Academia Española, define el término *dimensión*, como la medida de una magnitud en una determinada dirección, en este contexto, un punto no tiene dimensión, es decir, en la geometría Euclidiana su dimensión se define como cero, una recta entonces tiene dimensión uno (unidimensional), un cuadrado es bidimensional y un cubo es tridimensional, ver Figura 1.

1.2. Dimensión Topológica

En el presente contexto es conveniente definir en primer término, la dimensión topológica, ya que está involucrada en la definición de fractal.

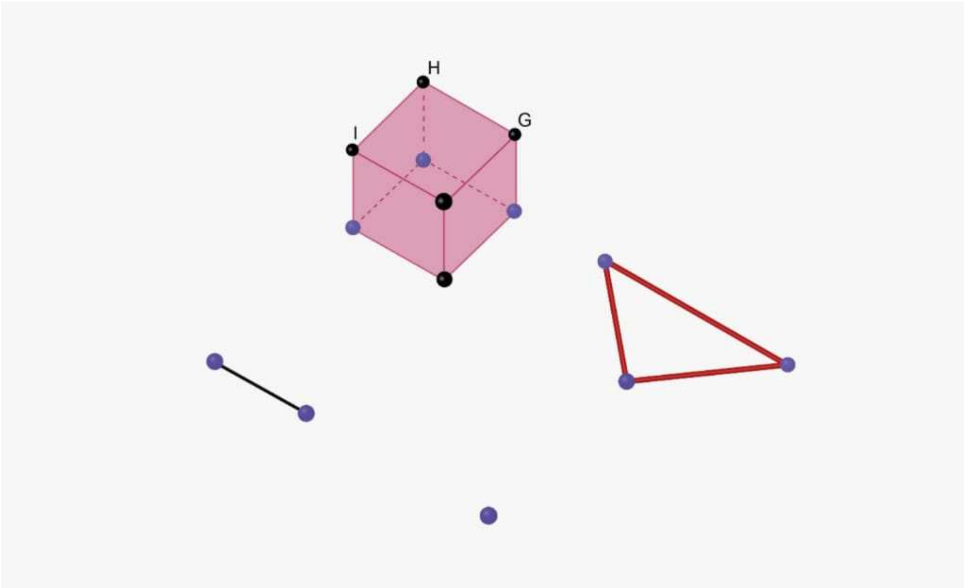

Figura 1. Dimensiones euclidianas

La topología es la rama de las matemáticas dedicada al estudio de aquellas propiedades de una forma al ser sometida a deformaciones producidas por doblamiento y estiramiento, verificando la capacidad elástica de su geometría para retener sus propiedades más generales, las cuales sólo se pierden por rompimiento y/o estrujamiento de su contorno (Echeverri, 2011).

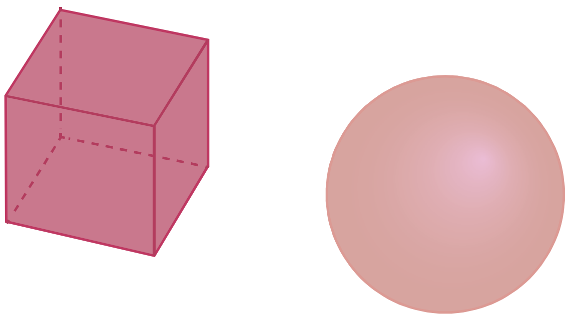

Figura 2. Dimensión topológica

La topología nos permite entender ciertas diferencias y similitudes de las formas, y calificarlas como topológicamente iguales o diferentes, por lo tanto, bajo este enfoque un cubo y una esfera son topológicamente iguales. (Ver Figura 2).

De acuerdo con Poincaré, la dimensión topológica se explica de manera inductiva de la siguiente manera: dado un ente cuyos bordes son todos puntos de un valor dimensional igual a ***n-1***, se tiene que la dimensión del espacio del ente es igual a ***n*** (Echeverri, 2011). La siguiente tabla muestra las definiciones básicas del espacio euclidiano respecto de la dimensión topológica.

TABLA 1
Dimensiones Topológicas.

Dimensión topológica (n)	Formas de (n) dimensiones	Formas correspondientes	Dimensión de borde (n-1)	Forma
0	0	Puntos	-1	Vacío
1	0,1	Puntos, líneas	0	Punto
2	0,1,2	Puntos, líneas y planos	1	Línea
3	1,2,3,4	Puntos, líneas, planos y volúmenes	2	Plano

Es conveniente resaltar algunos puntos importantes de esta geometría. El primero es una geometría que se enfoca en los aspectos cualitativos, de la misma manera clasifica los objetos equivalentes, la idea se enfoca en la noción de continuidad y finalmente es una dimensión representada por un número entero.

1.3. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

El matemático alemán Félix Hausdorff definió de una manera también intuitiva la dimensión que ahora lleva su nombre. Posteriormente el matemático ruso Abram Samoilovich Besicovicht la formalizó. La idea central es que existen objetos como la curva de Koch expuesta en la Figura 3, que no se puede decir que sea una recta, pero es tan fina que tampoco es un plano. La dimensión de Hausdorff ***Hf*** de un objeto ***X***, mide el número de conjuntos de longitud ***L*** que hacen falta para cubrir ***X*** por ***L***. Esta dimensión se representa por la siguiente expresión:

$$S = L^{D_{HB}} \tag{1}$$

Donde:

S = Tamaño de la figura.

L = La escala de medición.

D_{HB} = Dimensión de Hausdorf-Besicovich.

Si despejamos D_{HB} utilizando logaritmos llegamos a la siguiente expresión:

$$D_{HB} = \frac{\log S}{\log L} \qquad (2)$$

Que es la expresión común para el cálculo de la dimensión de Hausdorff-Besicovich.

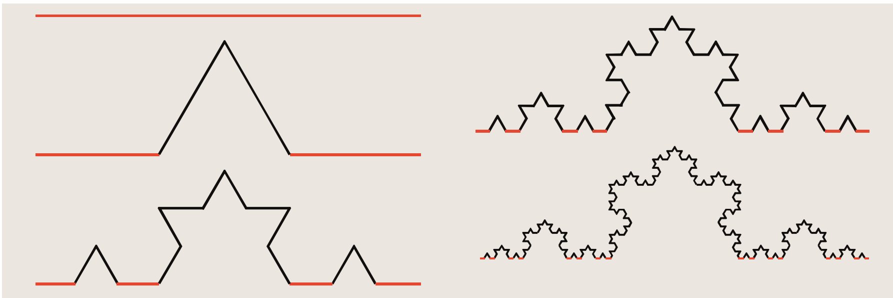

Figura 3. La curva de Koch

Si se calcula la dimensión de Hausdorff-Besicovich, en la curva de Koch, el resultado será 1.2619, un número fraccionario que representa una figura cuya dimensión está, en relación con la dimensión euclidiana, entre una recta y un plano, es decir, entre uno y dos.

1.4. La Similitud

Como se estableció, un fractal es una figura que mantiene su forma si se le cambia la escala, es decir, cada forma es similar a la anterior, el comportamiento descrito define un objeto auto-similar.

La auto-similitud se presenta en una gran variedad de fenómenos y situaciones muy diversas, como el flujo turbulento, en donde empiezan a aparecer, en primera instancia, pequeños remolinos, después remolinos más grandes y el movimiento del fluido se vuelve más irregular, o en la economía, no se entienden los motivos por los cuales en cierto momento el índice de la Bolsa de Valores empieza a subir y luego desciende (Braun, 2011). Un fractal tiene cierta forma auto-similar, quizá aproximada o estadística.

La Figura 4, muestra un objeto fractal generado con el programa Geogebra, la figura es denominada árbol de Pitágoras, ideado por Bosman en 1957 (Vera, 2007), la figura al lado del árbol es la que fue replicada varias veces para obtener el árbol, se le denomina generador, por lo tanto es una figura auto-similar.

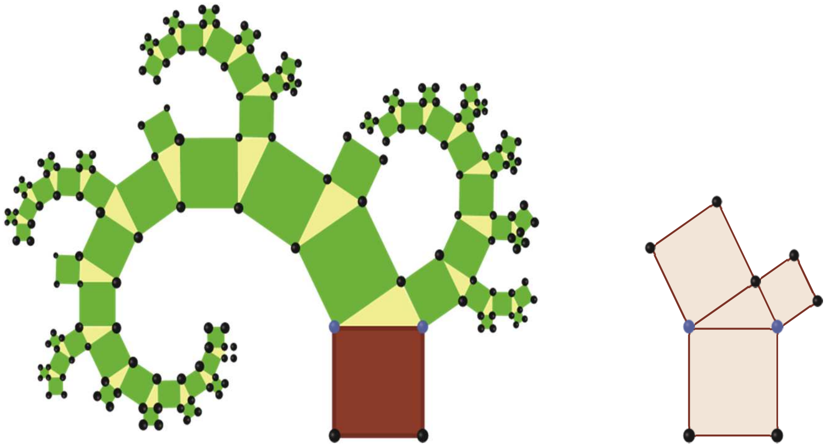

Figura 4. Árbol de Pitágoras

2. Conteo de Cajas (Box Counting)

La dimensión fractal intenta medir en qué grado un objeto en dos dimensiones (hablando de la dimensión Euclidiana) llena el espacio de tres dimensiones, o un objeto de dimensión uno, se asemeja a una superficie de dos dimensiones.

Una de las técnicas más utilizadas para calcular la dimensión fractal de una figura es la denominada Conteo de Cajas, debido a que es sencilla de implementar, proporciona buenos resultados y es rápido.

Como su nombre lo indica, lo que realiza este algoritmo es un conteo de cajas de manera iterativa y realiza las siguientes etapas (Ivarrola, 2017):

1. Calcula el recuadro que cubre la figura o curva seleccionada.
2. Realiza una división del recuadro en cajas o celdas, las cuales deben tener el mismo tamaño.
3. Se realiza el conteo de las cajas que contienen parte de la curva.
4. Se almacena un punto (x,y) en la que la coordenada *x* corresponde al tamaño de las cajas en esta iteración y la coordenada *y* corresponde al número de cajas que contienen parte de la curva.
5. Se realiza un decremento sobre el tamaño de las cajas y se vuelve al punto dos, tantas veces se quiera realizar.

6. Una vez realizadas todas las iteraciones y teniendo el resultado de cada iteración, se calculan los puntos (Log(x), Log(y)).
7. Se calcula la recta de regresión mediante el método de mínimos cuadrados de los puntos.
8. La pendiente de la recta obtenida es la estimación de la dimensión fractal del objeto con signo negativo.

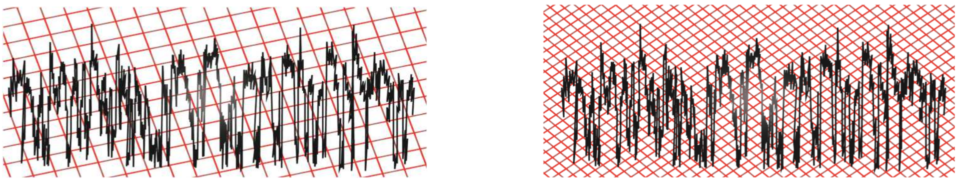

Figura 5. El Conteo de Cajas utilizado en el cálculo de la dimensión fractal

En la Figura 5 se aprecia la misma curva, característica de las mediciones de la velocidad del viento. En las gráficas está sobrepuesta una malla, la primera con tamaño de caja (cuadros) más grande, representando una parte del proceso de la técnica denominada Conteo de Cajas, para calcular la dimensión fractal.

3. La Dimensión fractal del viento

Para poder estimar la dimensión fractal del viento, es conveniente establecer la forma geométrica con la cual se representa éste. En el presente trabajo se calculó la dimensión fractal de una serie de tiempo de la velocidad del viento medida en forma horaria. Las series de tiempo de la velocidad del viento, también pueden ser medidas de forma diaria Harrouni (2016), o cada diez minutos (Yan et al., 2020).

Una serie de tiempo es una representación gráfica de las medidas de la velocidad del viento, como la que se muestra en la Figura 6, su principal característica es que las mediciones de ésta, están equiespaciadas, es decir, las mediciones se realizan en lapsos de tiempo iguales. En primera instancia, es necesario establecer si la gráfica anterior es un fractal, de acuerdo con la definición conocida; una vez establecido lo anterior, se puede calcular su dimensión a través de la técnica de Conteo de Cajas. Esta técnica sigue siendo utilizada para calcular la dimensión fractal, debido a su concepción simple y efectiva.

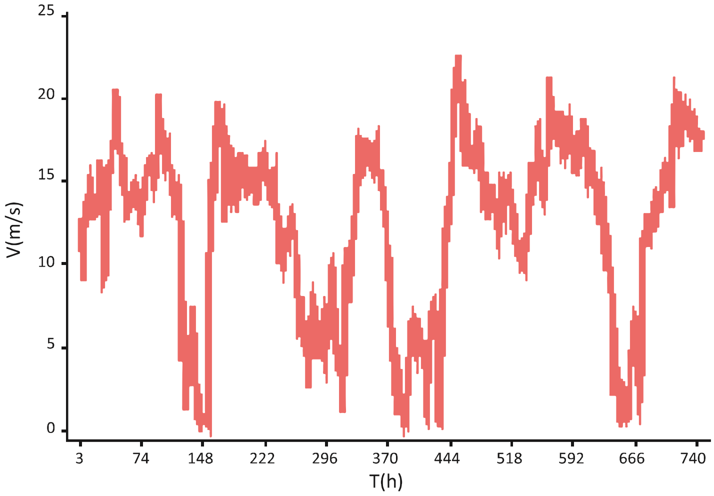

Figura 6. Serie de tiempo de la velocidad del viento en La Venta, Oaxaca, México

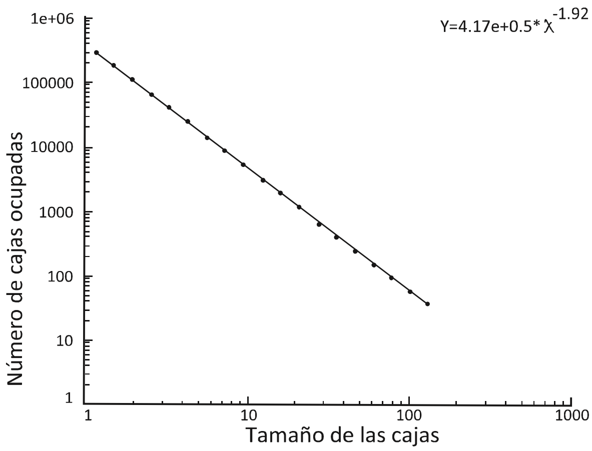

Figura 7. Gráfica generada para calcular la dimensión fractal

De acuerdo con el procedimiento establecido en el presente trabajo, es necesario generar varias simulaciones en las cuales se sobreponga una malla que debe variar el tamaño de las cajas, cada simulación representa un punto en un eje de coordenadas x-y, que representan en el eje x, el tamaño de las cajas de esa iteración y en el eje *y* al número de cajas que contiene la curva.

Cada punto de la Figura 7, representa una simulación realizada con un tamaño de caja diferente. Para obtener la línea recta se calculó el logaritmo de los ejes y, finalmente, el exponente de la x en la ecuación de la figura es la dimensión fractal de la misma, es decir, 1.92, su dimensión no es 1 como una recta, pero no es un plano, la dimensión debe estar entre 1 y 2.

La serie horaria tiene una dimensión fractal de 1.92, mientras la dimensión fractal calculada en una serie de tiempo medida cada diez minutos por Yan et al. (2020), es de 1.32, lo que refleja la diferencia en la traza de ambas series.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha establecido la necesidad de utilizar la geometría fractal para describir de manera matemática la dimensión fractal de una serie de tiempo horaria de la velocidad del viento. Este enfoque nos permite transitar hacia una etapa de comprensión del comportamiento del fenómeno, en éste caso, el viento. El análisis nos hace concluir que una serie de tiempo de la velocidad del viento tiene una estructura auto-similar y una dimensión fractal de 1.92, un número fraccionario entre 1 y 2. La series con ésta dimensión fractal son anti-persistentes y con una alta volatilidad. De esta manera y desde este enfoque, ahora contamos con más información del fenómeno, que en un inicio solo representaba una gráfica de dimensión euclidiana 2 y difícil de tratar. La información obtenida, ayudará a los pronosticadores de la velocidad del viento y de la potencia generada por una planta eólica, a elegir la mejor técnica de predicción para ésta serie.

Referencias

Braun E. 2011. Caos, fractales y cosas raras. Fondo de Cultura Económica. México. 156 pp.

Echeverri J., 2011. Grado de Dimensionalidad, Universidad del Valle, https://sites.google.com/site/dimension1ar/los-12-productos

Falconer, K. 1990. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications. Ed. Wiley & Sons, New York.

Harrouni, S. (2016). Long term persistence in daily wind speed series using fractal dimension. The International Journal of Multiphysics 7: 87-93.

Hong Y. Y., y Rioflorido C. L. P. P. (2019). A hybrid deep learning-based neural network for 24-h ahead wind power forecasting. Applied Energy 250: 530-539

Ivarrola R., 2017. Cálculo de la dimensión fractal de objetos 3d. Tesis de grado de Licenciatura, Universidad de Alicante, 85 pp. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/67830

Mandelbrot B. 2009. La geometría fractal de la naturaleza. Turquets Editores, Barcelona. 661 pp.

Nikolić V., Mitić V. V., Kocić L., y Petković D. (2017). Wind speed parameters sensitivity analysis based on fractals and neuro-fuzzy selection technique. Knowledge and Information Systems 52: 255-265.

Petković D., Nikolić V., Mitić V. V., v Kocić, L. (2017). Estimation of fractal representation of wind speed fluctuation by artificial neural network with different training algorothms. Flow Measurement and Instrumentation 54: 172-176.

Prósper M. A., Otero-Casal C., Fernández F. C., y Miguez-Macho G. (2019). Wind power forecasting for a real onshore wind farm on complex terrain using WRF high resolution simulations. Renewable Energy 135: 674-686.

Ren G., Liu J., Wan J., Guo Y., Yu D. y Liu J. 2017. Measurement and statistical analysis of wind speed intermittency. Energy 118: 632-643.

Singh S. N., y Mohapatra A. (2019). Repeated wavelet transform based ARIMA model for very short-term wind speed forecasting. Renewable energy 136: 758-768.

Vera W., Jorge G., Jorge H. 2007. Geometría Fractal, Ed. Nueva Librería, 151 pp.

Yan B., Chan P. W., Li Q. S., He Y. C., y Shu Z. R. (2020). Characterising the fractal dimension of wind speed time series under different terrain conditions. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 201: 104165.